

# Application of Phosphorus Simulation Models to Latian Reservoir

Siavosh Isazadeh,<sup>1</sup> Masoud Tajrishy,<sup>2</sup>  
Ahmad Abrishamchi<sup>3</sup>, and Mehdi Ahmadi<sup>4</sup>

# کاربرد مدل‌های شبیه‌سازی فسفر در مخزن سد لتیان

سیاوش عیسی‌زاده<sup>۱</sup> مسعود تجریشی<sup>۲</sup> احمد ابریشم‌چی<sup>۳</sup>  
مهدی احمدی<sup>۴</sup>

(دریافت ۸۳/۱۰/۱۹ پذیرش ۸۴/۴/۲)

## Abstract

The Latian Reservoir (70 Mm<sup>3</sup>) is located about 35 Km Northeast of Tehran and supplies drinking water to more than 2.5 million people in the greater Tehran metropolitan area. The main sources of water to the Latian Reservoir are the Lavarak River and the Jajrood River watershed which are becoming highly populated communities discharging their waste directly into surface waters.

The results of a 3-years water quality monitoring show that this reservoir is in the eutrophic stage because of high levels of nitrogen and phosphorus concentration. Because of the phosphorus role in lake and reservoir eutrophication, in this paper several well-known models of phosphorus were compared and eventually Snodgrass-O'Melia phosphorus model was selected for long term phosphorus simulation in this reservoir. Decrease of phosphorus concentration in the Jajrood River is the most effective way for decreasing phosphorous concentration in the water body of reservoir.

**Key words:** Phosphorus Simulation, Snodgrass – O'Mellia Model, Latian Reservoir.

## چکیده

سد مخزنی لتیان در ۳۵ کیلومتری شمال شرقی شهر تهران واقع شده است. این سد به همراه سد امیر کبیر و سد لار، منابع تامین آب سطحی شهر تهران را تشکیل می‌دهند. مطالعات انجام شده در طی سالهای اخیر در مورد سد لتیان نشان می‌دهد که بالا بودن غلظت فسفر در مخزن این سد، این منبع آب را در مرحله تغذیه‌گرایی قرار داده است. با توجه به نقشی که فسفر در پدیده تغذیه‌گرایی مخازن و دریاچه‌ها دارد، در این تحقیق با مقایسه چندین مدل شناخته شده فسفر، مدل اسنُدگرس و امیلیا برای شبیه‌سازی تغییرات غلظت فسفر در مخزن سد لتیان انتخاب شده است. با استفاده از این مدل، سناریوهای مختلف مدیریتی برای کاهش غلظت فسفر در این مخزن بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که کاهش فسفر ورودی به مخزن سد لتیان از طریق رودخانه جاجرود موثرترین روش کاهش غلظت فسفر در داخل مخزن در مقایسه با دیگر راهکارها به شمار می‌رود.

**واژه‌های کلیدی:** شبیه‌سازی فسفر، مدل اسنُدگرس و امیلیا سد لتیان.

1- Graduate Student of Environmental Engineering  
Department of Civil Engineering, Sharif University  
Technology, Tehran  
2- Associate Professor of Civil Engineering, Sharif University  
of Technology, Tehran  
3- Professor of Civil Engineering, Sharif University of  
Technology, Tehran  
4- Graduate Student of Environmental Engineering  
Department of Civil Engineering, Sharif University  
Technology, Tehran

۱- کارشناس ارشد مهندسی عمران - محیط زیست، دانشگاه صنعتی شریف  
۲- دانشیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف  
۳- استاد دانشکده مهندسی عمران - دانشگاه صنعتی شریف  
۴- کارشناس ارشد مهندسی عمران - محیط زیست دانشگاه صنعتی شریف

هدف از این تحقیق، مقایسه چند مدل شناخته شده فسفر برای بررسی تاثیر کاهش فسفر ورودی از رودخانه‌ها بر وضعیت تغذیه گرایبی مخزن لتیان است که سعی دارد با شبیه‌سازی فسفر در مخزن، مدل مناسب برای بررسی سناریوهای مدیریتی را انتخاب نماید. مبنای انتخاب این مدلها کاربرد زیاد در تحقیقات و تجربیات دیگران، برخورداری از مکانیسم‌های منطقی در داخل اجزای مدل و همچنین سادگی و نیاز کم به متغیرها برای کالیبراسیون مدل بوده است. این مدلها عبارت‌اند از:

۱- مدل فسفر کل چاپرا<sup>۱</sup> [۳]:

۲- مدل فسفر استندگرس و امیلیا<sup>۲</sup> [۴]:

۳- مدل فسفر کاناله و سیو<sup>۳</sup> [۵]:

۴- مدل فسفر کل چاپرا و کاناله<sup>۴</sup> [۱]:

۵- مدل اصلاح شده چاپرا [۲].

جدول ۱، ویژگی هر کدام از این مدلها را به صورت خلاصه نشان می‌دهد. در ادامه به خصوصیات هر کدام از این مدلها به صورت کلی اشاره خواهد شد.

## ۲- مواد و روشها

### ۲-۱- مدلهای فسفر

#### الف) مدل فسفر کل چاپرا

چاپرا ساده‌ترین مدل بیلان جرم فسفر کل برای دریاچه‌هاست [۱]. این مدل، دریاچه را به صورت یک سیستم با اختلاط کامل فرض کرده و فقط انتقال فسفر از آب به رسوب را در نظر می‌گیرد. مدل چاپرا، تنها نیاز به کالیبره کردن یک پارامتر - سرعت ظاهری ته‌نشینی فسفر - دارد. این سرعت نشان دهنده نرخ کاهش غلظت فسفر در دریاچه می‌باشد.

$$V \frac{dP}{dt} = W' - QP - vA_s P \quad (1)$$

$A_s$  = سطح آب - رسوب (متر مربع)

$P$  = غلظت فسفر کل ورودی (میلی گرم بر متر مکعب)

$W'$  = بار ورودی (میلی گرم در سال)

$v$  = سرعت ته‌نشینی ظاهری فسفر (متر در سال)

$Q$  = دبی جریان ورودی به مخزن (متر مکعب در سال)

$V$  = حجم مخزن (متر مکعب)

فسفوری که به داخل ستون آب در منابع آب وارد می‌شود، از نظر منشاء به دو دسته تقسیم می‌شود: دسته اول، فسفوری است که منشاء خارجی دارد؛ یا به عبارت دیگر بار خارجی، که عموماً ناشی از آورد آن توسط رودخانه‌هاست که می‌تواند به علت فرسایش حوزه آبریز و یا ورود فاضلاب به رودخانه‌ها باشد. دسته دوم، که منشاء داخلی دارد، بار داخلی نامیده می‌شود؛ و ناشی از تعلیق مجدد فسفر از رسوبی است که در کف دریاچه تجمع یافته و با تغییر شرایط محیطی در کف دریاچه، توانایی رها شدن از رسوب و ورود به داخل ستون آب را دارد. در بحث مدل‌سازی فسفر در مخازن آب، توجه به هر دو منشاء ورود فسفر به داخل ستون آب حائز اهمیت است [۱].

از اوایل دهه ۱۹۷۰، تلاش‌های زیادی برای مدل‌سازی فسفر در مخازن و دریاچه‌ها انجام گرفته است؛ لکن از آن‌جا که مدلها تصویر ساده‌ای از سیستمهای واقعی‌اند، نمی‌توانند کل اکوسیستم را با قطعیت و اطمینان کامل توصیف کنند. شکل و پیچیدگی مدلهای فسفر کل تفاوت زیادی با هم دارند. این مدلها ممکن است تجربی و یا بر اساس معادلات موازنه جرم ارائه گردند. بعضی از این مدلها فقط فسفر کل را در نظر می‌گیرند؛ ولی بعضی دیگر، اجزای فسفر مانند انواع فسفر محلول و معلق را نیز در نظر می‌گیرند. پاره‌ای از این مدلها، لایه‌بندی انتقال فسفر از رسوب، اجزای فسفر در رسوب و فسفر آلی یا معدنی را نیز در داخل خود لحاظ می‌کنند.

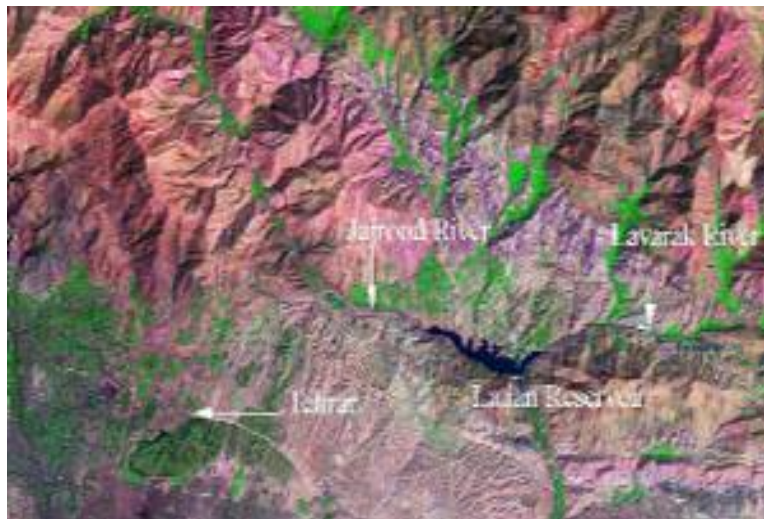
سد لتیان دارای چهار ورودی به نام رودخانه‌های جاجرود، لوارک، افجه و گلندوک است. بیشترین آورد آب به داخل مخزن سد از طریق رودخانه جاجرود است که حدود ۷۰ درصد دبی ورودی ورودی سالانه را تشکیل می‌دهد [۲]. رودخانه لوارک نیز که از طریق آب سد لار تغذیه می‌شود، حدود ۲۰ درصد از دبی ورودی سد لتیان را تشکیل می‌دهد. مطالعات و اندازه‌گیریهای به عمل آمده توسط دانشگاه صنعتی شریف نشان می‌دهد که شاخه ورودی جاجرود دارای غلظت بالایی از فسفر است؛ به طوری که حدود ۸۰ درصد از بار خارجی فسفر ورودی به مخزن سد لتیان را تشکیل می‌دهد [۳]. بخش عمده‌ای از آب ورودی به لوارک از طریق سد لار که در بالادست آن قرار دارد، تغذیه می‌شود. این آب اصولاً دارای کیفیت بالایی است و مقادیر غلظت فسفر در آن، در مقایسه با دیگر رودخانه‌های مهم این حوزه کمتر می‌باشد. با اجرای طرح انتقال آب سد لار از طریق تونل به تصفیه‌خانه پنجم شهر تهران، آب ورودی از لار به لوارک قطع گردیده و لوارک فقط آب طبیعی خود را که ناشی از ذوب برف و بارش در حوزه است، به داخل مخزن انتقال خواهد داد. شکل ۱ تصویر ماهواره‌ای حوزه آبریز سد مخزنی لتیان را نشان می‌دهد.

1 Chapra

2 Snodgroos - O'Mellia

3 Canale-Seo

4 Chapra-Canale



شکل ۱- تصویر ماهواره‌ای حوزه آبریز سد مخزنی لتیان

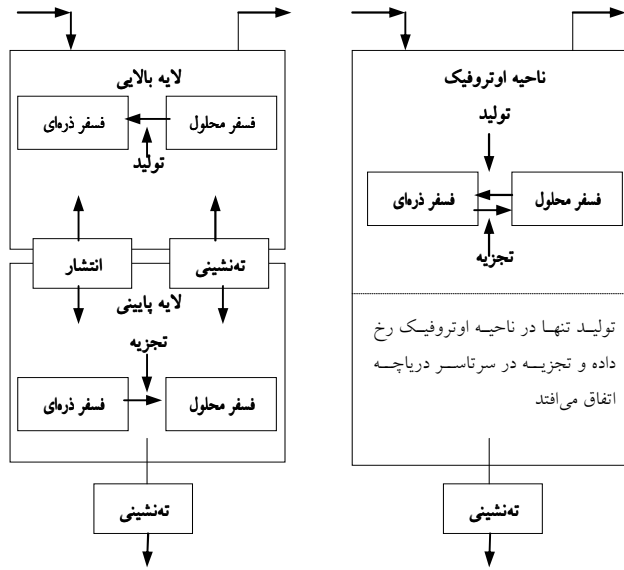
جدول ۱- مقایسه ویژگیهای مدل‌های بررسی شده [۲]

ویژگی	مدل			
	چاپرا و کاناله	کاناله و سیو	اسندگرس و آمیلیا	چاپرا
تعداد ضرایب مدل	۳	۵	۵	۱
تعداد متغیر وابسته	۲	۴	۴	۱
تعداد لایه‌های آب	۱	۲	۲	۱
تعداد لایه‌های رسوب	۱	۱	۰	۰
اثر DO	-	-	-	-
اثرات دما	-	+	+	-
انتقال قائم	-	+	+	-
تغییرات فصلی سرعت ته‌نشینی	-	-	+	-
واکنش بین اجزاء فسفر	-	+	+	-
رها سازی فسفر از رسوب	+	+	-	-
دفن فسفر در رسوب	+	-	-	-
تجزیه فسفر آلی در رسوب	-	-	-	-

ب) مدل اسندگرس و آمیلیا  
اسندگرس و آمیلیا در مدل خود فرض کردند که دریاچه در تابستان دچار لایه بندی است و در زمستان بازچرخش وجود دارد، به صورتی که هرکدام از این دوره‌ها شش ماه طول می‌کشد. فرآیندهایی که در دریاچه اتفاق می‌افتد و در این مدل دیده می‌شود، عبارت‌اند از: تبدیل ارتوفسفات به فسفات معلق، تجزیه فسفات

از این مدل به دفعات زیاد و در تعداد زیادی دریاچه استفاده شده است. از جمله این دریاچه‌ها، دریاچه شاگاوا<sup>۱</sup> در آمریکا است که در سال ۱۹۷۶ میلادی از این مدل برای شبیه‌سازی فسفر آن استفاده شد [۱].

<sup>1</sup> Shagawa



شکل ۲- دیگرام مدل اسندگرس و امیلیا در تابستان (چپ) و زمستان (راست) [۶]

فسفات معلق و ارتوفسفات در زمستان

(۶)

$$V \frac{d[OP]}{dt} = \sum Q_j [OP]_j - Q[OP] - P_{eu} V_{eu} [OP] + rV[PP]$$

(۷)

$$V \frac{d[PP]}{dt} = \sum Q_j [PP]_j - Q[PP] - P_{eu} V_{eu} [OP] - rV[PP] - gA_s [PP]$$

که در این روابط:

$A_s$  = سطح تماس بین آب و رسوب (متر مربع)

$A_{th}$  = سطح مقطع دریاچه در لایه حرارتی (متر مربع)

$f$  = ضریب فلوکولاسیون (یک بر متر)

$g$  = سرعت ته‌نشینی در کل دریاچه (متر در روز)

$g_h$  = سرعت ته‌نشینی در لایه پایینی (متر در روز)

$g_e$  = سرعت ته‌نشینی در لایه بالایی (متر در روز)

$g_o$  = سرعت ته‌نشینی در غیاب فلوکولاسیون (متر در روز)

$k_{th}$  = ضریب انتقال عمودی در لایه حرارتی (متر مربع در روز)

$P_e$  = ضریب نرخ تولید در لایه بالایی (متر مربع در روز)

$P_{eu}$  = ضریب نرخ تولید در مدل چرخشی (یک بر روز)

$Q$  = دبی تخلیه از دریاچه (متر مکعب در روز)

$Q_i$  = دبی ورودی به دریاچه (متر مکعب در روز)

$r$  = ضریب نرخ تجزیه فسفر معلق برای کل دریاچه (یک بر روز)

$r_h$  = نرخ تجزیه فسفر معلق برای لایه پائینی (یک بر روز)

$t$  = زمان (روز)

معلق به ارتوفسفات و تبادل عمودی مواد در بین لایه‌های بالایی<sup>۱</sup> و پایینی<sup>۲</sup> ستون آب. فسفر معلق از فسفر محلول تولید می‌شود و از طریق تجزیه و یا ته‌نشینی به فرم محلول تبدیل می‌شود. تبدیل فسفر معلق به فسفر محلول<sup>۳</sup> در تابستان در لایه بالایی و در زمستان در کل دریاچه اتفاق می‌افتد [۶]. شکل ۲، دیگرام مدل پیشنهادی این محققان را نشان می‌دهد.

روابط حاکم بر این مدل عبارت‌اند از:

فسفات معلق و ارتوفسفات در لایه بالایی در تابستان

(۲)

$$V_e \frac{d[OP]_e}{dt} = \sum Q_j [OP]_j - Q[OP]_e - P_e V_e [OP]_e + \frac{k_{th}}{z_{th}} A_{th} ([OP]_h - [OP]_e)$$

(۳)

$$V_e \frac{d[PP]_e}{dt} = \sum Q_j [PP]_j - Q[PP]_e - P_e V_e [PP]_e + \frac{k_{th}}{z_{th}} A_{th} ([PP]_h - [PP]_e) - g_e A_{th} [PP]_e$$

فسفات معلق و ارتوفسفات در لایه پایینی در تابستان

(۴)

$$V_h \frac{d[OP]_h}{dt} = r_h V_h [PP]_h + \frac{k_{th}}{z_{th}} A_{th} ([OP]_e - [OP]_h)$$

(۵)

$$V_h \frac{d[PP]_h}{dt} = g_e A_{th} [PP]_e - g_h A_s [PP]_h - r_h V_h [PP]_h + \frac{k_{th}}{z_{th}} A_{th} ([PP]_e - [PP]_h)$$

<sup>1</sup> Epilimnion

<sup>2</sup> Hypolimnion

<sup>3</sup> Mineralization

$$\begin{aligned}
 V &= \text{حجم کل دریاچه (متر مکعب)} \\
 V_e &= \text{حجم لایه بالایی (متر مکعب)} \\
 V_{eu} &= \text{حجم لایه روئین در مدل چرخشی (متر مکعب)} \\
 V_h &= \text{حجم لایه پایینی (متر مکعب)} \\
 Z &= \text{میانگین عمق دریاچه (متر)} \\
 Z_{eu} &= \text{میانگین عمق منطقه euphotic (متر)} \\
 Z_h &= \text{میانگین عمق لایه پایینی (متر)} \\
 Z_{th} &= \text{میانگین عمق لایه حرارتی (متر)} \\
 [OP] &= \text{غلظت ارتوفسفات (میلی گرم در لیتر)} \\
 [PP] &= \text{غلظت فسفات معلق (میلی گرم در لیتر)}
 \end{aligned}$$

ج) مدل فسفر کاناله و سیو

مدلهای فسفر که بعدها ارائه شد، با در نظر گرفتن فسفر رهاشده از رسوب توسعه یافتند. یکی از این مدلها، مدل کاناله و سیو است. این مدل، دو حالت از فسفر را در یک مخزن که به دو بخش تقسیم گردیده در نظر می‌گیرد. معادلات پایه این مدل براساس روابط مدل استندگرس و آمیلیا برای فصل لایه‌بندی است، به استثنای اینکه فسفر رهاشده از رسوب را نیز لحاظ می‌کند [۷۴]. در این مدل همانند مدل استندگرس و آمیلیا، تولید و تجزیه مواد معلق در دولایه بالایی و زیرین ستون آب فرض می‌گردد. همچنین فرض بر این است که در طول دوره لایه‌بندی، غلظت فسفر کل به دلیل کاهش حجم آب خروجی و کاهش اختلاط در لایه زیرین ستون آب افزایش می‌یابد. بنابراین غلظت فسفر در این لایه تا به هم خوردگی پروفیل حرارتی، در حال افزایش می‌باشد. همچنین هنگامی که سیستم دچار اختلاط می‌شود، فسفر کل به دلیل خروج از سیستم و اختلاط عمودی کاهش می‌یابد.

روابط تعادل جرم برای این مدل عبارت‌اند از:

(۸)

$$V_e \frac{dD_e}{dt} = W_d - QD_e + E'(D_h - D_e) + k_{pd} P_e V_e - k_{dp} D_e V_e \quad (9)$$

$$V_e \frac{dD_h}{dt} = E'(D_e - D_h) + k_{pd} P_h V_e + \text{تبادل رسوبی} \quad (10)$$

$$V_h \frac{dP_e}{dt} = W_p - QP_e + E'(P_h - P_e) - k_{pd} P_e V_e + k_{dp} D_e V_e - v_s A P_e \quad (11)$$

$$V_h \frac{dP_h}{dt} = E'(P_e - P_h) + v_s A P_e - v_s A P_h - k_{pd} P_h V_h$$

که در آنها:

$$\begin{aligned}
 A &= \text{سطح بین آب- رسوب (متر مربع)} \\
 D_e &= \text{فسفر محلول در لایه بالایی (میلی گرم در لیتر)} \\
 D_h &= \text{فسفر محلول در لایه پایینی (میلی گرم در لیتر)} \\
 E' &= \text{ضریب دیفیوژن حجمی (متر مکعب در روز)} \\
 K_{dp} &= \text{نرخ تولید مواد محلول به معلق (لیتر در روز)} \\
 K_{pd} &= \text{نرخ باز چرخش مواد معلق، به محلول (لیتر در روز)} \\
 P_e &= \text{فسفر محلول در لایه بالایی (میلی گرم در لیتر)} \\
 P_h &= \text{فسفر محلول در لایه پایینی (میلی گرم در لیتر)} \\
 V_e &= \text{حجم لایه بالایی (متر مکعب)} \\
 V_h &= \text{حجم لایه پایینی (متر مکعب)} \\
 v_s &= \text{سرعت ته نشینی (متر در ثانیه)}
 \end{aligned}$$

د) مدل فسفر چاпра-کاناله

چاпра و کاناله در سال ۱۹۹۱ مدلی را توسعه دادند که می‌توانست پاسخ دریاچه به تغییرات فسفر ورودی برای بازه‌های طولانی زمان را شبیه‌سازی کند [۸]. این مدل سیستم را به دو قسمت تقسیم می‌کند (شکل ۳). سینتیکی که در انتقال و سرنوشت فسفر کل در این مدل در نظر گرفته شده عبارت است از ته نشینی، رهاسازی و دفن. این مدل، نرخ رهاسازی را تابعی از غلظت فسفر در رسوب و غلظت اکسیژن محلول در لایه زیرین ستون آب و درجه حرارت در نظر می‌گیرد. این نرخ با کاهش غلظت اکسیژن محلول افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش دما نیز فعالیت‌های بیولوژیکی افزایش می‌یابند. بنابراین، این مدل قادر است که تغییرات فصلی فسفر را مدل‌سازی کند. این مدل برای تخمین رهاسازی فسفر نیاز به اطلاعات اکسیژن محلول و درجه حرارت دارد. روابط حاکم بر این مدل عبارتند از:

$$V_1 \frac{dP_1}{dt} = W - QP_1 - v_s A_2 P_1 + v_r A_2 P_2 \quad (12)$$

$$V_2 \frac{dP_2}{dt} = v_s A_2 P_1 - v_r A_2 P_2 - v_b A_2 P_2 \quad (13)$$

که در این روابط:

$A_2$  = سطح منطقه ته نشینی (متر مربع)

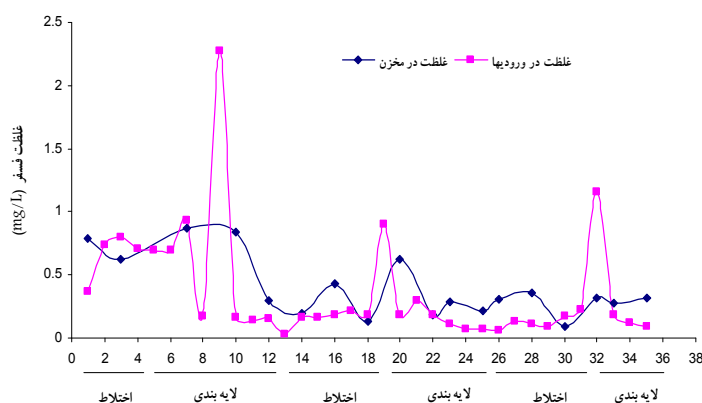
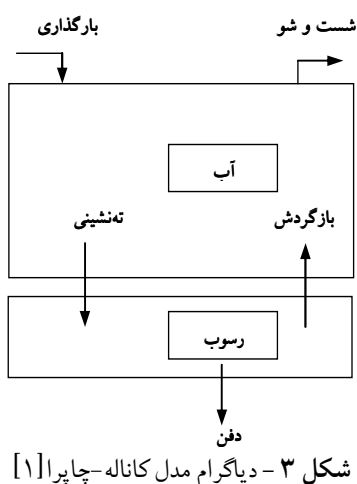
$v_s$  = سرعت ته نشینی فسفر از آب به رسوب (متر در سال)

$v_r$  = نرخ انتقال جرم از رسوب به آب (متر در سال)

$v_b$  = ضریب دفن فسفر رسوب از محیط اشباع به عمق رسوب

(متر در سال)

اندیس‌های ۱ و ۲ به ترتیب بیانگر آب و محیط اشباع رسوب می‌باشد.



شکل ۴- تغییرات میانگین غلظت فسفر در کل مخزن و متوسط غلظت ورودی‌ها به سد لتیان (شهریور ۱۳۸۰ تا مرداد ۱۳۸۳)

#### ه) مدل اصلاح شده چاپرا

برای بررسی وضعیت مخزن سد لتیان از لحاظ تغذیه‌گرایی، در حدود سه سال، اندازه‌گیری میدانی در مخزن این سد انجام گرفته است. در این دوره، بیست مورد اندازه‌گیری از اعماق مختلف سد لتیان انجام شده که هر کدام از این اندازه‌گیریها در برگرفته دوره‌های مختلف اختلاط و لایه‌بندی در مخزن سد بوده‌اند [۲ و ۳]. شکل ۴، روند تغییرات غلظت فسفر را در مخزن و ورودیهای سد لتیان در طول دوره پایش نشان می‌دهد. با مشاهده و تحلیل نتایج اندازه‌گیریهای فسفر که در مخزن سد و نیز ورودیهای مخزن انجام گرفته و همچنین با توجه به رفتار فسفر در آن (در ابتدا و انتهای دوره لایه بندی)، بار داخلی فسفر سهمی در حدود ۱۰ تا ۱۵ درصد کل فسفر در مخزن این سد را دارد [۲]. این رهاسازی فسفر تحت تأثیر دو مکانیسم عمده قرار دارد.

مکانیسم اول: رها شدن فسفر از رسوب به دلیل شرایط نیمه‌هوازی (غلظت اکسیژن زیر ۲ میلی گرم در لیتر) است که در

اواخر دوره لایه‌بندی در مخزن اتفاق می‌افتد. این پدیده با توجه به نتایج آزمایشگاهی به دست آمده به شدت تحت تأثیر حضور گونه‌ای از کرمهای کم‌خاردار به نام توبیفکس<sup>۱</sup> می‌باشد [۲].

مکانیسم دوم: اختلاط شدیدی است که در داخل مخزن بر اثر به هم خوردن لایه‌بندی حرارتی اتفاق می‌افتد. این مکانیسم به دنبال نیمه‌هوازی شدن مخزن در انتهای دوره لایه‌بندی، باعث پخش سریع فسفر در مقادیر زیاد در کل مخزن می‌گردد. با توجه به وجود بار داخلی فسفر در مخزن سد لتیان، در این تحقیق مؤلفه بار داخلی در مدل چاپرا اضافه شد و کارایی آن در شبیه‌سازی فسفر در این مخزن بررسی شد. ساختار کلی این مدل همانند مدل فسفر کل چاپرا می‌باشد، با این تفاوت که یک پارامتر به عنوان بار داخلی در سه ماه از سال (شهریور، مهر و آبان) در آن لحاظ می‌شود. این مدل علاوه

<sup>1</sup> Tubifex

بر سرعت ته نشینی، نیاز به کالیبراسیون بار داخلی نیز دارد. شکل ۵ دیگرام این مدل را نشان می‌دهد.

$$V \frac{dP}{dt} = W' - QP - vA_s P \quad (14)$$

$A_s$  = سطح آب- رسوب (متر مربع)

$v$  = سرعت ته نشینی ظاهری فسفر (متر در ماه)

$P$  = غلظت فسفر کل در ورودی (کیلوگرم بر متر مکعب)

$Q$  = دبی جریان (متر مکعب در ماه)

$W'$  = بار ورودی (کیلوگرم در ماه)

$V$  = حجم مخزن (متر مکعب)

$L$  = بار ورودی از رسوب (کیلوگرم در ماه)

## ۲-۲- واسنجی مدل<sup>۱</sup>

روش‌های متنوعی برای ارزیابی خطاهایی که توسط عدم قطعیت ناشی از ضرایب در مدل تولید می‌شود، وجود دارد. آنیل<sup>۲</sup> در سال ۱۹۷۹ از ضریب تغییرات<sup>۳</sup> برای ارزیابی خطاهای مدل استفاده کرد [۹]. گاردنر و همکارانش<sup>۴</sup> در سال ۱۹۸۰ از مربع باقی‌مانده‌ها<sup>۵</sup> استفاده کردند [۹]. ویلیام<sup>۶</sup> و لگت<sup>۷</sup> از شاخص اعتماد پذیری<sup>۸</sup> و هالفمن<sup>۹</sup> از آزمون کای مربع [۱۱] و همچنین افرادی مانند یرزلیانند<sup>۱۰</sup>، لنتنمیر<sup>۱۱</sup>، پیکس<sup>۱۲</sup> و وان استراتن<sup>۱۳</sup> از آزمون نسبت احتمال<sup>۱۴</sup> برای ارزیابی خطای ناشی از مدل‌سازی در منابع آب استفاده کرده‌اند [۴]. تمامی این فرضیه‌ها بر اساس تحلیل اختلاف بین پیشگویی مدل و مقادیر اندازه‌گیری شده پایه‌گذاری شده‌اند. کالیبراسیون برای تخمین مقادیر ضرایب مناسب در مدل می‌تواند با روش سعی و خطا و استفاده از تحلیل‌های بالا حاصل شود.

<sup>1</sup> Calibration

<sup>2</sup> O'Neill

<sup>3</sup> Coefficient of Variation

<sup>4</sup> Gardner et al.

<sup>5</sup> Squared Residual

<sup>6</sup> William

<sup>7</sup> Legget

<sup>8</sup> Reliability Index

<sup>9</sup> Halfman

<sup>10</sup> Yearslyand

<sup>11</sup> Lettenmaire

<sup>12</sup> Pilks

<sup>13</sup> Van Straten

<sup>14</sup> Likelihood-Ratio-Test

رابطه زیر یکی از روابط معمول در واسنجی می‌باشد که هر چه میانگین مربعات باقیمانده<sup>۱۵</sup> بیشتر باشد، دقت مدل پایین‌تر و هر چه مدل دقت بیشتری داشته باشد، میانگین مربعات باقیمانده کمتر خواهد بود [۱].

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (TP_{p,i} - TP_{o,i})^2 \quad (15)$$

که در آن:

$n$  = تعداد مشاهدات

$TP_{p,i}$  = غلظت فسفر پیشگویی شده توسط مدل

$TP_{o,i}$  = غلظت فسفر مشاهده شده

$S^2$  = مجموع مربعات باقیمانده

رابطه دیگری توسط چاپرا و کاناله برای دریاچه شاگاوا استفاده شده است. ایشان با به کار بردن هم‌بستگی بین مقادیر پیشگویی شده و مقادیر اندازه‌گیری شده، سعی در ارائه معیاری برای کالیبراسیون مدل نموده و رابطه زیر را پیشنهاد نموده‌اند [۱]. در این معادله هرچقدر  $R^2$  به عدد یک نزدیکتر باشد، نشان از نزدیکی بین مقادیر پیشگویی شده و مشاهده شده دارد.

$$(16)$$

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (TP_{O,i} - TP_{mean})^2 - \sum_{i=1}^n (TP_{O,i} - TP_{p,i})^2}{\sum_{i=1}^n (TP_{O,i} - TP_{mean})^2}$$

که در این رابطه:

$TP_{mean}$  = میانگین غلظت مقادیر مشاهده شده

$TP_{O,i}$  = مقادیر غلظت مشاهده شده

$TP_{p,i}$  = مقادیر غلظت پیشگویی شده توسط مدل

با توجه به این‌که از بین مدل‌های ذکر شده در این مقاله، مدل اسندگرس و آمیلیا برای شبیه‌سازی تغییرات غلظت فسفر در مخزن سد لتیان انتخاب شده است، از آوردن مقادیر اولیه پارامترها در فرآیند کالیبراسیون دیگر مدل‌ها صرف‌نظر می‌گردد. برای کالیبراسیون اولیه مدل اسندگرس و آمیلیا در ابتدا برای مقادیر متغیرها از مقادیر اولیه‌ای که خود این دو محقق ارائه کرده بودند، استفاده شد [۶]. جدول ۲، مقادیر اولیه برای این پارامترها را نشان می‌دهد.

## ۲-۳- مقایسه مدل‌ها

در این تحقیق، مدل‌های انتخابی برای کل دوره پایش (سه سال) کالیبره شده‌اند. جدول‌های ۳ و ۴ پارامترهای کالیبره شده

<sup>15</sup> Mean of Squared Residual

جدول ۲- ضرایب پیشنهادی مدل اسنُدگرس و اُمیلیا توسط این دو محقق [۴]

اختلاط زمستانی	لايه بندى تابستانی
$g = g_0 [1 + f (\bar{Z} - \bar{Z}_{eu})]$	$g_e = 0.1m / day$
$g_0 = 0.05 m / day$	$g_h = g_0 (1 + f \bar{Z}_h)$
$f = 0.5 m$	$g_0 = 0.05 m / day$
$\bar{Z}_{eu} = 10 \text{ for } \bar{Z} \geq 10 m$	$f = 0.5 m$
$\bar{Z}_{eu} = \bar{Z} \text{ for } \bar{Z} < 10 m$	$\frac{k_{th}}{\bar{Z}_{th}} = \hat{k} = 0.005 \bar{Z}$
	$\bar{Z}_e = 1.6 \bar{Z}^{0.568}$
	$P_e = 2.0 day$
	$r_h = .03 day$

این دو محقق پارامترهای ذکر شده را قابل استفاده در اکثر دریاچه‌ها دانسته‌اند

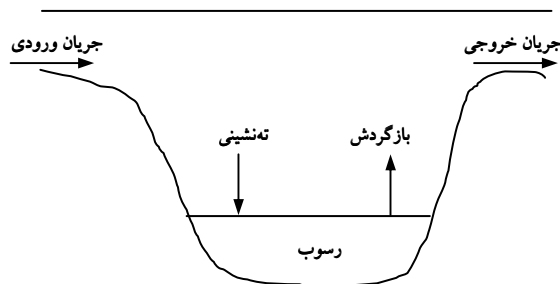
جدول ۳- مقادیر پارامترهای کالیبره شده برای مدل‌های مقایسه شده [۲].

پارامترهای کالیبره شده	مقدار	واحد
<b>کاناله-چاپرا</b>		
سرعت ته نشینی $v$	۰/۵	متر در ماه
سرعت دفن ( $v_b$ )	$7 \times 10^{-4}$	متر در ماه
سرعت رهاسازی ( $v_r$ )	۰/۲۶۱	متر در ماه
<b>کاناله-سیو</b>		
سرعت ته نشینی (لایه بالایی) ( $g_e$ )	۲/۱	متر در ماه
سرعت ته نشینی (لایه پایینی) ( $g_h$ )	۳۷	متر در ماه
نرخ تولید ( $p$ )	۲/۷	یک در ماه
ضریب تصحیح دما	۱/۰۸	
نرخ تجزیه ( $f$ )	۹	یک در ماه
مقدار وارد شده از رسوب	۱۰۰۰	کیلوگرم در ماه
<b>اصلاح شده چاپرا</b>		
سرعت ته نشینی $v$	۰/۵	یک در ماه
بار ورودی از رسوب $L$	۲۵۰۰۰	کیلوگرم در ماه

جدول ۴- پارامترهای کالیبره شده مدل فسفر اسنُدگرس و اُمیلیا برای سد مخزنی لتیان [۲]

پارامترها	مقادیر	واحد
سرعت ته نشینی در کل دریاچه ( $g$ )	۴۱/۶	متر در ماه
سرعت ته نشینی در لایه بالایی ( $g_e$ )	۲/۱	متر در ماه
سرعت ته نشینی در لایه پایینی ( $g_h$ )	۳۵/۴	متر در ماه
نرخ تولید ( $f$ )	۲/۳	یک در ماه
نرخ تجزیه ( $p$ )	۹	یک در ماه





شکل ۵ - دیاگرام مدل اصلاح شده چاپرا

فسفر در اثر پدیده پخش را نمی‌تواند به خوبی در مخزن شبیه‌سازی کند (شکل ۷).

با توجه به این که مدل اسنُدگرس و آمیلیا در بین مدل‌های انتخاب شده، یک مدل دو قسمتی است، بهتر از سایر مدل‌های تغییرات غلظت فسفر را در مخزن سد لتیان شبیه‌سازی می‌کند. با توجه به این که سهم بار داخلی فسفر در این مخزن کم است، این مدل پیش‌بینی بهتری نسبت به دیگر مدل‌ها ارائه می‌کند. این مدل در مقایسه با مدل کاناله-سیو ساختار مشابهی دارد، ولی از آنجا که مدل ذکر شده بار ورودی فسفر از رسوب را به صورت فسفر محلول در طول دوره لایه‌بندی در نظر می‌گیرد، فقط در لایه پایینی وارد می‌شود. اضافه کردن این بار در اوایل دوره لایه‌بندی با توجه به شرایط مخزن منطقی به نظر نمی‌آید؛ از طرف دیگر در این مدل غلظت فسفر محلول در لایه پایینی در طول دوره لایه‌بندی به تدریج اضافه می‌شود و چون تبدیل این فسفر محلول به فسفر معلق در لایه بالایی اتفاق می‌افتد، تا انتهای لایه‌بندی حرارتی، فسفر محلول در لایه پایینی باقی می‌ماند و در دوره اختلاط در کل دریاچه پخش می‌شود. این امر باعث می‌شود تا مدل در دوره لایه‌بندی مقادیر بیشتری از داده‌های اندازه‌گیری شده را نشان دهد و باعث بیشتر شدن فاصله بین مقادیر پیشگویی شده و مشاهده شده شود (شکل ۸). لازم به تأکید است که مدل اسنُدگرس و آمیلیا بدون در نظر گرفتن ترم فسفر محلول رها شده از رسوبات، نتایج مشابهی با مدل کاناله-سیو نشان می‌دهد (شکل ۱۰).

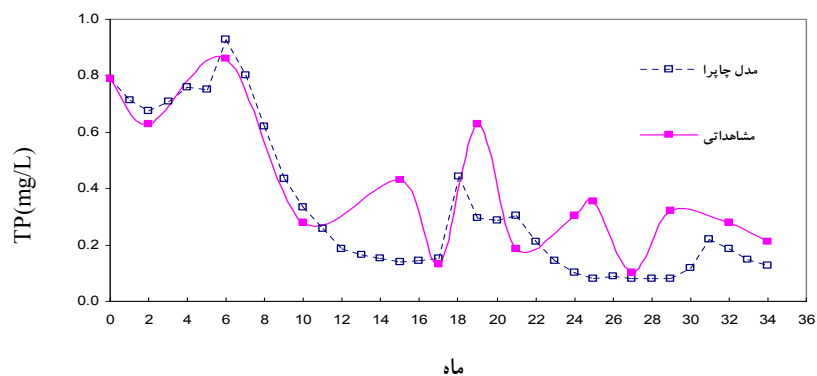
مدل اصلاح شده چاپرا با این که یک قسمتی است، ولی در مقایسه با دو مدل تک قسمتی دیگر، تغییرات غلظت فسفر در مخزن را بهتر پیش‌بینی می‌کند. به نظر می‌آید این مدل در پیشگویی‌های طولانی مدت به شرط آن که شرایط بهره‌برداری از مخزن سد تغییر نکند، تخمین خوبی از تغییرات غلظت فسفر در مخزن را ارائه دهد. شرایط بهره‌برداری از این نظر مهم است که این مدل در سه ماه از سال بار ورودی را در نظر می‌گیرد، که این سه ماه

برای مدل‌های به کار رفته در این مطالعه را نشان می‌دهند. پیش از پرداختن به مقایسه نتایج مدل‌ها شایان ذکر است که در این مطالعه با دو گروه از مدل‌ها مواجه می‌باشیم. دسته اول مدل‌هایی هستند که آنها را می‌توان مدل‌های تک قسمتی<sup>۱</sup> نامید. این مدل‌ها در ساختار خود یک شماییک کلی برای ورود و خروج فسفر در کل طول دوره مدل‌سازی دارند. مثال این گونه مدل‌ها، مدل فسفر کل چاپرا و همچنین مدل چاپرا و کاناله می‌باشد که رها سازی فسفر از رسوب را نیز در نظر می‌گیرد. دسته دوم از مدل‌ها که آنها را می‌توان مدل‌های دو قسمتی<sup>۲</sup> نامید، در ساختار خود دو حالت را در طول دوره یک سال مدل‌سازی لحاظ می‌کنند. از نمونه این مدل‌ها می‌توان مدل اسنُدگرس و آمیلیا و نیز مدل کاناله و سیو را ذکر کرد که در قسمتی از طول دوره مدل‌سازی، مخزن را در حالت لایه‌بندی و در قسمتی دیگر از طول دوره، مخزن را در حالت اختلاط کامل فرض می‌کنند. لازم به ذکر است که مدل اصلاح شده چاپرا نیز در دسته اول این تقسیم‌بندی قرار می‌گیرد، با این تفاوت که در سه ماه از سال یک پارامتر به عنوان بار داخلی نیز لحاظ می‌شود.

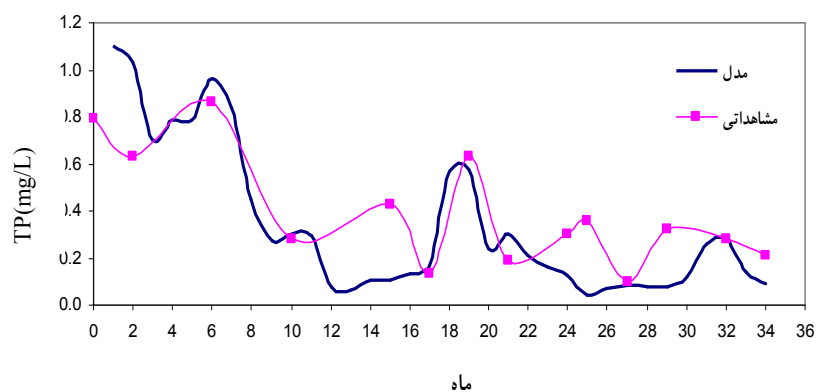
نتایج شبیه‌سازی با مدل‌های کالیبره شده در شکل‌های ۶ تا ۱۲ نشان داده شده است. همان گونه که در این شکل‌ها مشخص است عموماً شبیه‌سازی تغییرات غلظت فسفر در سد مخزنی لتیان با مدل‌های دو قسمتی، بهتر از مدل‌های تک قسمتی جواب می‌دهد. مدل فسفر کل چاپرا با توجه به این که مخزن را در حالت اختلاط کامل و فقط متأثر از بار خارجی در نظر می‌گیرد، در ماه‌هایی که مکانیسم رها سازی فعال می‌شود، قادر به پیشگویی غلظت فسفر در مخزن نمی‌باشد (شکل ۶). مدل چاپرا و کاناله علی‌رغم این که مقادیر نرخ رها سازی را لحاظ می‌کند، ولی چون این نرخ تابعی از درجه حرارت و غلظت اکسیژن محلول می‌باشد و مخزن فقط در مدت کوتاهی آنهم در انتهای دوره، لایه‌بندی نیمه‌هوایی می‌شود و بعد از آن با شروع اختلاط مخزن بلافاصله هوایی می‌گردد، رها شدن

<sup>1</sup> One Box

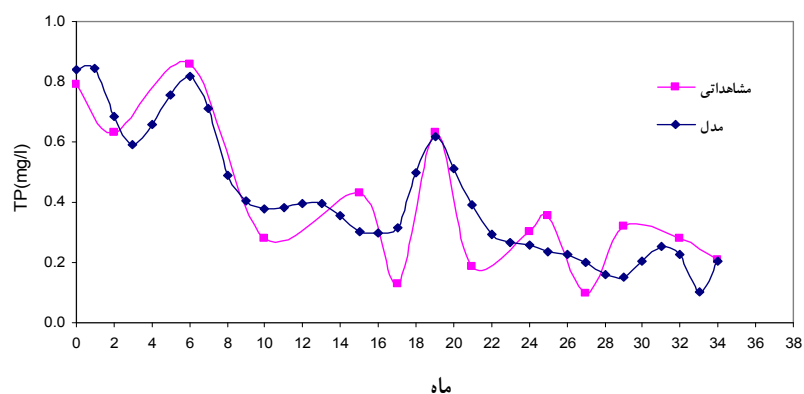
<sup>2</sup> Two Boxes



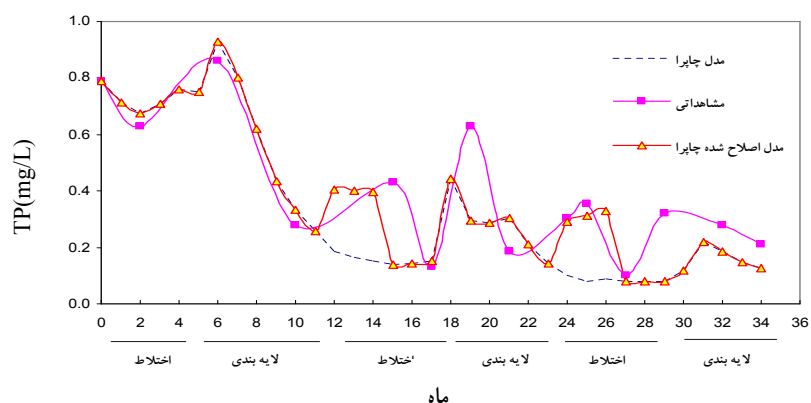
شکل ۶- نمودار شبیه‌سازی غلظت فسفر کل در مخزن سد لتیان با مدل فسفر کل چایرا



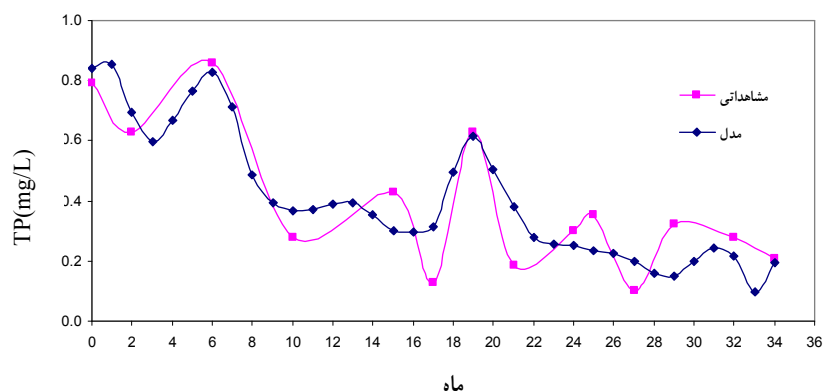
شکل ۷- نمودار شبیه‌سازی غلظت فسفر کل در مخزن سد لتیان با مدل فسفر کل کاناله-چایرا



شکل ۸- نمودار شبیه‌سازی غلظت فسفر کل در مخزن سد لتیان با مدل فسفر کل کاناله-سیو



شکل ۹ - نمودار شبیه‌سازی غلظت فسفر در مخزن سد لتیان با مدل اصلاح شده چاپرا [۲]



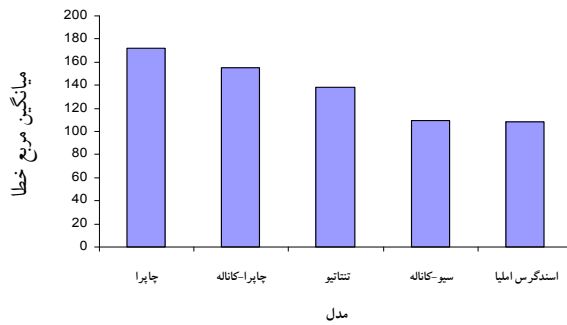
شکل ۱۰ - نمودار شبیه‌سازی غلظت فسفر کل در مخزن سد لتیان با مدل فسفر استندگرس و آمیلیا

جدول ۵ - نتایج مقایسه مدلها در مخزن سد لتیان

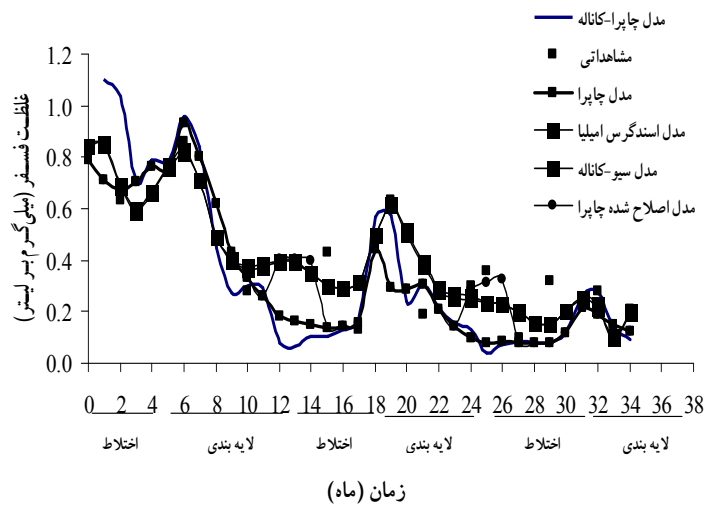
مدل	میانگین مربعات باقیمانده	R <sup>2</sup>
چاپرا	۱۷۲	۰/۷۱۰
چاپرا-کاناله	۱۵۵	۰/۶۷۰
اصلاح شده چاپرا	۱۳۸	۰/۷۴۰
سیو-کاناله	۱۰۹	۰/۷۹۰
استندگرس و آمیلیا	۱۰۸	۰/۷۹۴

جدول ۶ - میانگین غلظت فسفر مخزن سد لتیان در صورت اجرای هر کدام از سناریوها در ۱۰ سال آینده

سناریو	غلظت فسفر (µg/L)	
	حداکثر	حداقل
۱	۹۵۰	۳۲۰
۲	۵۹۰	۱۹۰
۳ (افزایش ۲۵ درصدی لوارک)	۸۸۰	۱۷۰
۳ (افزایش ۵۰ درصدی لوارک)	۸۲۰	۱۷۰
۴	۶۴۰	۱۴۰
۵	۷۷۰	۲۵۰
۶	۵۱۰	۱۸۰



شکل ۱۱ - مقایسه مدل‌های به کار برده شده در سد مخزنی لتیان



شکل ۱۲ - مقایسه نتایج شبیه‌سازی مدل‌ها برای تخمین میزان غلظت فسفر در مخزن سد لتیان (شروع، شهریور ۱۳۸۰)

#### ۲-۴- تحلیل حساسیت مدل پیشنهادی اسندگرس و امیلیا

از بین پارامترهای کالیبره شده مدل برای مخزن سد لتیان، مدل اسندگرس و امیلیا کمترین حساسیت را به تغییرات  $g_0$  (سرعت ته‌نشینی بدون در نظر گرفتن لخته شدن) و بیشترین حساسیت را به تغییرات  $g_e$  (سرعت ته‌نشینی فسفر در لایه بالایی) از خود نشان می‌دهد [۲]. در مورد پارامترهای مرتبط با ضرایب تولید و تجزیه فسفر معلق، این مدل بیشترین حساسیت را به ضریب تولید فسفر معلق در لایه بالایی ( $P_e$ ) و کمترین حساسیت را به ضریب تولید فسفر معلق در کل مخزن ( $P_{eu}$ ) در دوره اختلاط از خود نشان می‌دهد. در مجموع می‌توان نتیجه‌گیری کرد که این مدل بیشترین حساسیت را به پارامتر تولید فسفر معلق در لایه بالایی دارد. با توجه به اینکه در این مطالعه داده‌های مشاهده‌ای برای مخزن کم بوده‌اند، لذا ترجیح داده شد تا برای کالیبراسیون از تمامی داده‌ها استفاده گردد و داده‌ای برای تصدیق<sup>۱</sup> مدل به کار گرفته نشود.

با توجه به الگوی بهره‌برداری فعلی ارائه شده‌اند. اگر این الگو تغییر یابد، به عنوان مثال، اگر در شرایط خاصی مخزن در ماه‌هایی غیر از اواسط شهریور، مهر و آبان دچار تخلیه مقدار زیادی آب گردد، مدل غلظت فسفر در داخل مخزن را بیشتر از مقدار واقعی نشان خواهد داد (شکل ۹). جدول ۳ و شکل‌های ۱۱ و ۱۲ نتایج حاصل از مقایسه این مدل‌ها را نشان می‌دهند.

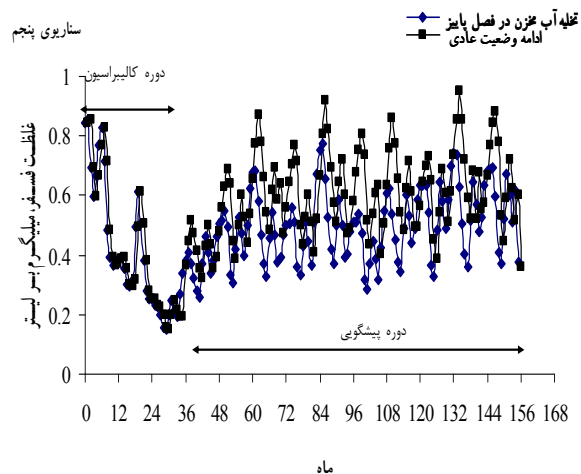
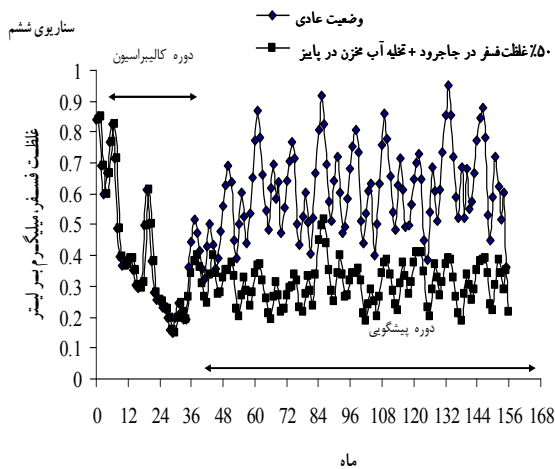
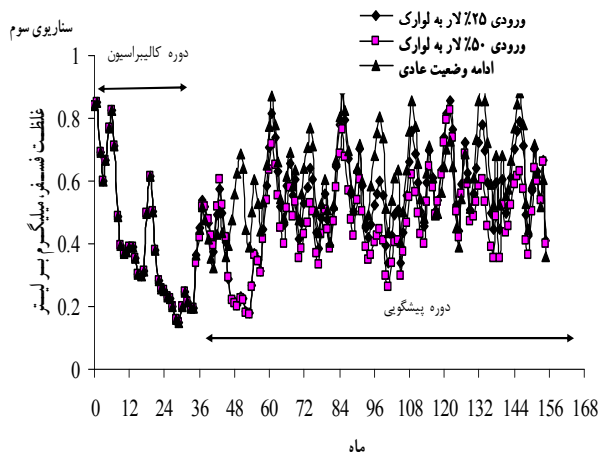
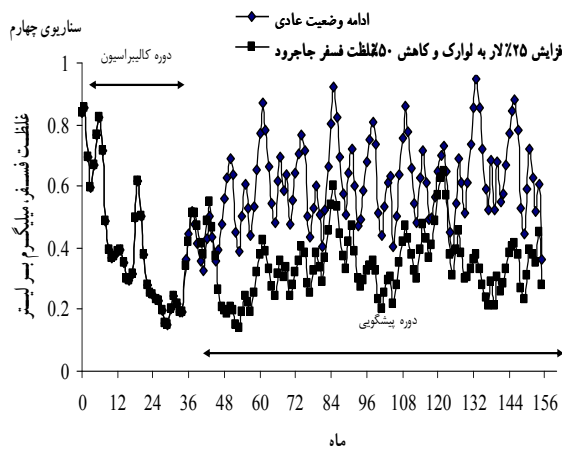
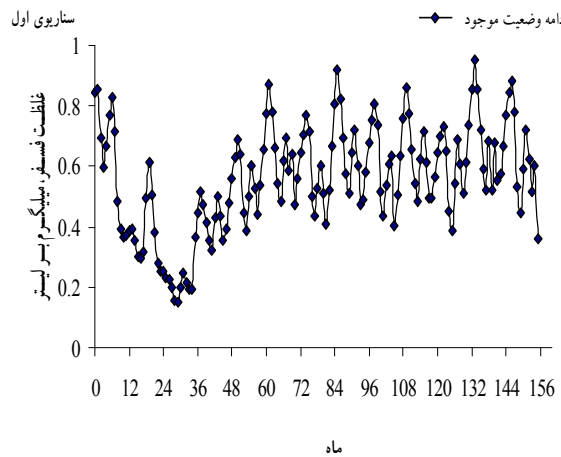
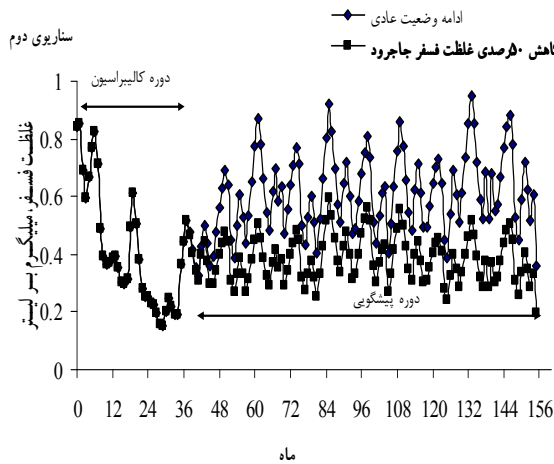
با توجه به جدول ۵ و مواردی که در مورد مقایسه دو مدل اسندگرس و امیلیا و کاناله-سیو ذکر شد، متوجه می‌شویم که از بین مدل‌های مقایسه شده، مدل اسندگرس و امیلیا بیشترین مقدار  $R^2$  و کمترین مقدار میانگین مربعات باقیمانده را داشته و بیشترین نزدیکی را با مقادیر مشاهده شده نشان می‌دهد. همچنین با توجه به اینکه بار ورودی از رسوب در مخزن لتیان سهم کمی در کل بار فسفر در مخزن در مقایسه با بار ورودی به مخزن دارد، این مدل به عنوان یک مدل مناسب برای شبیه‌سازی طولانی مدت فسفر در مخزن (برای یک دوره ۱۰ ساله) انتخاب شده است.

<sup>۱</sup> Verification

### ۳- نتایج و بحث

۱-۳- نتایج حاصل از اجرای سناریوهای کاهش غلظت فسفر در مخزن برای مدیریت کاهش غلظت فسفر در مخزن سد لتیان، شش سناریوی مختلف با توجه به شرایط این مخزن به شرح زیر بررسی شد:

۱- با توجه به این که آب ورودی از سد لار به رودخانه لوآرک قطع گردیده، با ورود آب طبیعی لوآرک و با فرض تکرار دبی ۱۰ سال گذشته در رودخانه‌های جاجرود، گلندوک و افجه تغییرات غلظت فسفر در مخزن سد لتیان در ۱۰ سال آینده به چه نحوی خواهد بود؟



شکل ۱۳- نمودار نتایج سناریوهای اعمال شده با مدل استُدگرس و آمیلیا در سد مخزنی لتیان

#### ۴- نتیجه‌گیری

نتایج حاصل از این مطالعه و کاربرد مدل‌های شبیه‌سازی برای مخزن سد لتیان نشان می‌دهد که مدل‌های دو قسمتی برای مخزن سد لتیان بهتر از مدل‌های یک قسمتی جواب می‌دهد. با این که مدل اسندگرس و امیلیا در داخل خود بار داخلی ناشی از رهاسازی فسفر از رسوب را لحاظ نمی‌کند، ولی قادر است تغییرات غلظت فسفر در مخزن سد را به خوبی پیش بینی کند. نتایج حاصل از اجرای سناریوهای مختلف مدیریتی نشان می‌دهد که عموماً سناریوی کاهش غلظت فسفر در شاخه ورودی جاجرود نسبت به سناریوهای رقیق سازی توسط لوارک بهتر جواب می‌دهند. بهترین گزینه برای کاهش غلظت فسفر در مخزن سد لتیان کاهش ۱۰ متری آب مخزن در دوره اختلاط (خروج آب در پاییز) به همراه کاهش ۵۰ درصدی غلظت در شاخه جاجرود می‌باشد (شکل ۱۳). این گزینه در درازمدت باعث کاهش قابل توجه فسفر در مخزن سد لتیان خواهد شد.

#### ۵- قدردانی

از زحمات آقای مهندس علیرضا نظری علوی عضو هیئت علمی مرکز تحقیقات آب و انرژی دانشگاه صنعتی شریف به خاطر همکاری صمیمانه در انجام آزمایش‌های سه ساله مخزن و همچنین از تمامی دانشجویانی که در نمونه‌برداری از مخزن و ورودی‌های آن همکاری نمودند به ویژه آقایان احسان ارحامی، پوریاکلیدی و خانم نیره صبوری‌منش تشکر می‌شود.

۲- کاهش ۵۰ درصدی غلظت فسفر در ورودی شاخه جاجرود و تکرار دبی ۱۰ سال گذشته در این رودخانه و رودخانه‌های گلندوک و افجه، چه تأثیری در تغییرات غلظت فسفر در مخزن سد لتیان خواهد داشت؟

۳- با توجه به این که آب ورودی از لار به لوارک به طور کامل قطع گردیده و رودخانه لوارک فقط آورد طبیعی خود را دارد، افزایش دبی ورودی فعلی از لوارک به مخزن سد به میزان ۲۵ و ۵۰ درصد نسبت به حالت قبل از اجرای طرح انتقال آب، چه تأثیری در تغییرات غلظت فسفر در مخزن سد لتیان دارد؟ این سناریو را به نحو دیگری نیز می‌توان مطرح کرد که شاخه ورودی لوارک، در زمان قبل از اجرای طرح چه اندازه در رقیق سازی غلظت فسفر مخزن سد لتیان نقش داشته است؟

۴- با اعمال ترکیبی از سناریوهای دو و سه، یا به عبارت دیگر کاهش ۵۰ درصدی غلظت فسفر در شاخه جاجرود و برگرداندن ۲۵ درصد آب ورودی از لوارک به حالت سابق، غلظت فسفر در مخزن سد لتیان در ۱۰ سال آینده دچار چه تغییراتی خواهد شد؟

۵- تخلیه ۱۰ متری آب در دوره‌های اختلاط چه تأثیری در روند تغییرات غلظت فسفر مخزن در ۱۰ سال آینده خواهد داشت؟

۶- کاهش ۵۰ درصدی غلظت فسفر در شاخه ورودی جاجرود و تخلیه ۱۰ متری آب در دوره اختلاط از مخزن در ۱۰ سال آینده تا چه اندازه می‌تواند غلظت فسفر را در مخزن کاهش دهد؟ جدول ۶ نتایج حاصل از اجرای مدل انتخاب شده را برای هر یک از سناریوهای پیشنهادی نشان می‌دهد.

#### ۶- مراجع

- 1- Chapra, S. C. (1997). *Surface water – quality modeling*, McGraw-Hill, NewYork.
- 2-Isazadeh, S, Tajrishy, M, Nazari, A. and Abrishamchi. A. (2005). "A laboratory study of sediment phosphorus flux in the Latian Dam reservoir". *Proceedings of EWRI 2002 onference, Copyright ASCE*.
- ۲- کلدی، پ. (۱۳۸۲). "تعیین حد مجاز ورود مواد مغذی به مخزن سد لتیان برای جلوگیری از تغذیه‌گرایی آن". پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی محیط زیست، دانشگاه صنعتی شریف.
- 4- Seo, Dong, IL. (1996). "Performance, reliabilty and uncertainty of total phosphorus models for lake - stochastic analysis." *Water Research*, 30, 95-102.
- 5- Seo, Dong, IL. and Canale, R. P. (1999). "Analysis of sediment characteristic and total phosphorus model for shagawa lake." *J., Environmental Engineering*, 4, 346-350.
- 6- Snodgrass, W. J. and O Melia, C. R. (1975). "Predictive model of phosphorus in lakes." *J. Environmental Science and Technology*, 9, 937-945.
- 7- Seo, Dong, IL. (1996). "Performance, reliabilty and uncertainty of total phosphorus models for lake - deterministic analysis." *Water Research*, 30, 83-94.
- 8- Chapra, S. C. and Canale, R. P. (1991). "Long term phenomenological model of phosphorus and oxygen in stratified lake." *Water Research*, 25, 707-715.
- 9- O'Neill, R. V. (1979). "Natural variability as a source of error in model predications in systems analysis of ecosystem." *International Cooperative Publishing House, Fairland, Maryland*, 23-32.
- 10- Gardner, R.H., O'Neill, R.V., Mankin, J.B. and Kumar, D. (1980). "Comparative error analysis of six predator- prey models." *J. Ecology*, 6, 323-332
- 11- Halfman, E. (1985). "Is there a best model structure ? III. Testing the goodness of fit." *Ecological Modeling*, 27, 15-23.