

کاربرد روش گرادیان تراز آب در روش تفکیک تفاضل بردار فلاکس در حل عددی معادلات آبهای کم عمق

عبدالحسین بغلانی^۱

(دریافت ۸۷/۱۱/۱۷ پذیرش ۸۸/۹/۱۱)

چکیده

در این مقاله حل معادلات آبهای کم عمق توسط روش تفکیک تفاضل فلاکس ارائه شد. معادلات حاکم با بهره‌گیری از روش دستگاه مختصات منحنی الخط منطبق بر مرز، از دامنه فیزیکی به دامنه محاسباتی منتقل گردید تا حل معادلات در مسائل با مرزهای پیچیده‌تر نیز امکان‌پذیر گردد. برای به‌دست آوردن فلاکس عددی از روش حل تقریبی رو استفاده شد. معادلات مربوطه با استفاده از روش حجمهای محدود جداسازی شدند. برای متوازن کردن بردار ترم چشمه با گرادیان بردار فلاکس از روش ساده و قدرتمند گرادیان تراز آب (SGM) استفاده شد تا حل عددی بر روی بستر ناهموار نیز امکان‌پذیر گردد. روش ارائه شده قابلیت تسخیر شوک را نیز داشت. مقایسه نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های عددی مسائل کلاسیک با نتایج حاصل از جوابهای تحلیلی و سایر روشهای عددی، دقت و قابلیت مناسب این روش را نشان داد.

واژه‌های کلیدی: تفکیک تفاضل فلاکس، معادلات دو بعدی کانال‌های باز، روش با قابلیت تفکیک بالا

Application of Surface Gradient Method in Flux-Vector Splitting for Numerical Solution of Shallow Water Equations

Abdolhossein Baghlani¹

(Received Feb. 6, 2009 Accepted Dec. 2, 2009)

Abstract

This paper presents the solution of shallow water equations using the flux-difference splitting method. To handle more complex geometries, the governing equations are transferred from the physical to the computational domain by using boundary-fitted curvilinear coordinates. Roe's method has been employed to evaluate the numerical flux and the finite-volume approach has been used to discretize the equations. To ensure the balance of source term and flux gradient, the simple and powerful Surface Gradient Method (SGM) has been adopted, which not only enables the model to simulate flow over uneven bed topography but makes it shock-capturing as well. Some classical problems have been modeled to show that the results obtained from the proposed model are in good agreement with those of analytical solutions and other numerical methods.

Keywords: Flux-Difference Splitting, Two-Dimensional Open Channel Flow, High-Resolution Scheme

1. Assist. Prof. of Civil Eng. Dept., Azad Islamic University,
Yasooj Branch (+98 711) 7264102 hbaghlani@yahoo.com

۱- استادیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد یاسوج
hbaghlani@yahoo.com (۰۷۱۱) ۷۲۶۴۱۰۲

در روش کاهش تغییرات کل به کنترل نوسانات عددی با استفاده از محدود کننده‌های فلاکس^۸ پرداخته می‌شود. این روش ابتدا توسط هارتن^۹ در سال ۱۹۸۳ ارائه گردید و توسط اوشر و همکاران^{۱۰} بسط و توسعه یافت [۱، ۲ و ۳]. روش اساساً غیر نوسانی را نیز ابتدا هارتن و همکاران در سال ۱۹۸۷ ارائه کردند [۴]. ایده هوشمندانه پشت این روش این بود که بسته به هموار بودن جوابها، تعدادی از گرهای مجاور به گره‌ای که فلاکس عددی قرار است در آنجا محاسبه شود در نظر گرفته شوند. به این ترتیب می‌توان حتی تعداد زیادی از نقاط هم جوار را در نظر گرفته و یک چند جمله‌ای مناسب را بر آنها برازش نمود و فلاکس عددی را در نقطه مورد نظر به دست آورد. روش تفکیک بردار فلاکس بر اساس علامت مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین فلاکس^{۱۱}، بردار فلاکس را به مقادیر مثبت و منفی آن تفکیک می‌کند زیرا جهت انتشار امواج و نوع جداسازی بردار فلاکس به علامت این مقادیر ویژه بستگی دارد. این ایده اولین بار توسط استگر^{۱۲} و وارمینگ^{۱۳} در حل معادله اولر^{۱۴} در دینامیک گازها ارائه شد. بعدها نمونه‌های پیشرفته‌تری از این روش توسط محققان دیگر نیز ارائه گردید [۵، ۶، ۷ و ۸].

روش تفکیک تفاضل فلاکس که بر اساس روش حل گودونوف^{۱۵} استوار است، در فصل مشترک هر سلول با سلول مجاور یک مسئله ریمان را حل می‌کند تا فلاکس عددی در آن فصل مشترک به دست آید [۹]. مسئله ریمان که مانند مسئله شکست سد در هر فصل مشترک است را می‌توان هم به صورت دقیق^{۱۶} و هم به صورت تقریبی^{۱۷} حل کرد که در عمل استفاده از روش تقریبی به علت سرعت عمل و دقت مناسب بیشتر متداول است [۱۰].

مسئله متوازن بودن بردار ترم چشمه و گرادیان بردار فلاکس نیز مسئله‌ای است که اخیراً توجه بسیار زیادی به آن شده است. در واقع برای حل مسائل کانال‌های باز بر روی بسترهای ناصاف مانند بستر طبیعی یک رودخانه، لازم است که روش حل به گونه‌ای انتخاب شود که چنین توازنی وجود داشته باشد در غیر این صورت روش عددی ایجاد نوساناتی می‌کند که این نوسانات می‌توانند نهایتاً

امروزه با توجه به افزایش سرعت رایانه‌ها و بسط و پیشرفت روشهای ریاضی، استفاده از روشهای عددی برای حل پدیده‌های طبیعی که عمدتاً دارای معادلات دیفرانسیل حاکم خاص خود هستند، کاربردهای زیادی پیدا کرده است. مشکل استفاده از مدل‌های آزمایشگاهی، چه از لحاظ مشکلات ساخت و هزینه‌ها و چه از لحاظ محدودیت فضا، به روشهای عددی قدرتمند، اعتبار بیشتری بخشیده است. روشهای عددی ضمن کاهش شدید هزینه‌ها امکان مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی را بیش از پیش فراهم کرده‌اند. چنین عمومیتی را می‌توان در استفاده وسیع از نرم‌افزارهای تخصصی در طراحی‌ها که مبتنی بر روشهای عددی هستند به روشنی ملاحظه کرد.

به‌طور خاص در مهندسی آب و هیدرولیک نیز استفاده از نرم‌افزارهای تخصصی مثل HEC-RAS مقبولیت زیادی دارد. معمولاً چنین نرم‌افزارهایی از مدل‌های یک بعدی جریان استفاده می‌کنند در حالی که در بیشتر اوقات برای رسیدن به جوابهای واقعی‌تر استفاده از مدل‌های دو بعدی و سه بعدی لازم است. حل معادلات دو بعدی و سه بعدی جریان اگرچه مشکل‌تر است ولی بهتر می‌تواند جریان واقعی سیال را مدل‌سازی نماید و در پاره‌ای اوقات استفاده از آنها به جای مدل‌های یک بعدی اجتناب‌ناپذیر است.

علاوه بر نیاز به مدل‌سازی‌های دقیق‌تر، گاهی ممکن است در دامنه یک جریان، ناپیوستگی‌هایی مانند پرش هیدرولیکی وجود داشته باشند. به‌عنوان مثال جریان در یک حوضچه آرامش، که در عمل کاربردهای مهمی نیز دارد، معمولاً با جهش هیدرولیکی همراه است. چنین ناپیوستگی‌هایی را اصطلاحاً در ادبیات علمی شوک^۱ می‌نامند و روشهایی را که قابلیت تشخیص و تسخیر این ناپیوستگی‌ها را داشته باشند روشهای تسخیر کننده شوک^۲ می‌گویند. اخیراً استفاده از روشهای دارای قابلیت تفکیک بالا^۳ در مدل‌های عددی برای تسخیر شوک رواج زیادی یافته است. چنین روشهایی نه تنها قابلیت تسخیر شوک را دارند، بلکه به‌طور دقیق‌تری جریان را مدل‌سازی می‌کنند. روشهایی مثل روش کاهش تغییرات کل^۴، روش اساساً غیر نوسانی^۵، روش تفکیک بردار فلاکس^۶ و روش تفکیک تفاضل فلاکس^۷ از آن جمله‌اند.

⁸ Flux Limiter

⁹ Harten

¹⁰ Osher et al.

¹¹ Jacobian Flux

¹² Steger

¹³ Warming

¹⁴ Euler Equation

¹⁵ Godunov

¹⁶ Exact Riemann Solver

¹⁷ Approximate Riemann Solver

¹ Shock

² Shock Capturing

³ High-Resolution Schemes

⁴ Total Variation Diminishing (TVD)

⁵ Essentially Non-oscillatory (ENO)

⁶ Flux-Vector Splitting (FVS)

⁷ Flux-Difference Splitting (FDS)

SGM را بتوان برای کلیه روشهایی که در آنها از حل به روش گودونوف استفاده می‌شود، مورد استفاده قرار داد.

۲- معادلات حاکم

معادلات دو بعدی حاکم بر جریان آبهای کم عمق در دستگاه کارتری به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = C \quad (1)$$

که در آن

$$S = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\tau_{bx}}{\rho} + gh \frac{\partial z}{\partial x} \\ -\frac{\tau_{by}}{\rho} + gh \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad G = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}$$

که در این روابط

h عمق آب، u و v منتجهای سرعت به ترتیب در جهتهای x و y ، ρ جرم مخصوص آب، z تراز کف بستر از سطح مبنا، g شتاب جاذبه، τ_{bx} و τ_{by} مؤلفه‌های تنش برشی کف در دو جهت، بردار S بردار متغیرهای ابقایی^{۱۳}، F و G به ترتیب فلاکس در جهتهای x و y و C بردار ترم چشمه است.

در نظر گرفتن سایر پارامترها مثل اثر کوریولیس^{۱۴}، تلاطم و تنش برشی ناشی از باد بر روی سطح آب در معادلات شناخته شده است و چون در نظر گرفتن آنها تنها بر دقت جوابها مؤثر است و بر روی روش حل تأثیری ندارند، اثرات آنها در اینجا ناچیز انگاشته شد.

تنش برشی کف را می‌توان با رابطه ۳ محاسبه کرد

$$\tau_{bx} = \rho g n^2 h^{-1/3} u \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \tau_{by} = \rho g n^2 h^{-1/3} v \sqrt{u^2 + v^2} \quad (3)$$

که در آن

n ضریب زبری مانینگ است.

روابط بالا را می‌توان مطابق شکل ۱ با استفاده از دستگاه مختصات منحنی الخط منطبق بر مرز از دامنه فیزیکی (x, y) به

منجر به ناپایداری آن شوند. متعادل بودن گرادیان بردار فلاکس و ترم چشمه را اصطلاحاً خاصیت C می‌نامند که ایده آن را ابتدا برمودز^۲ و وازکوئر^۳ در سال ۱۹۹۴ ارائه کردند [۱۱]. هوبارد^۴ و گارسیا-ناوارو^۵ این ایده را برای روشهای بالاتر بسط دادند [۱۲]. در سال ۲۰۰۱ ژو و همکاران^۶ یک روش بسیار ساده اما قدرتمند را برای بالانس بردار ترم چشمه^۷ و گرادیان بردار فلاکس ارائه دادند که به روش گرادیان تراز آب^۸ (SGM) شناخته شده است [۱۳]. آنها روش خود را برای حل به روش گودونوف و روش HLL^۹ برای به دست آوردن فلاکس عددی در فصل مشترک دو سلول ارائه داده و نشان دادند که خاصیت C به درستی ارضا می‌شود [۱۳].

در این مقاله از روش گرادیان تراز آب برای برقراری خاصیت C بر روی بسترهای ناهموار استفاده شد. استفاده از این روش همانطور که اشاره شد، در ابتدا در ترکیب با روش HLL توسط ژو و همکاران ارائه گردید. روش HLL در جریان‌هایی که ذاتاً یک بعدی هستند و موج برشی که ناشی از مولفه v سرعت (در جهت y) است در آنها وجود ندارد جوابهای قابل قبولی از خود نشان می‌دهد. تحقیقات نشان می‌دهد که این روش در جریان‌هایی مانند شکست دو بعدی سد که ماهیت دو بعدی دارند و در آنها موج برشی وجود دارد دارای نتایج قابل قبولی نیست [۱۰].

در اینجا به منظور رفع این مشکل برای به دست آوردن فلاکس عددی از روش تفکیک تفاضل فلاکس و روش تقریبی رو^{۱۰} برای حل مسئله ریمان در فصل مشترک، استفاده شد. همچنین این مقاله نشان داد که روش گرادیان فلاکس برای بالانس کردن گرادیان فلاکس و ترم چشمه نه تنها در روش HLL بلکه در کلیه طرحهایی که از روش تفکیک تفاضل فلاکس استفاده می‌کنند، کاربرد دارد. معادلات ابتدا با استفاده از دستگاه مختصات منحنی الخط منطبق بر مرز^{۱۱} به دامنه محاسباتی منتقل شد و توسط روش حجمهای محدود، تفکیک گردید. در نهایت معادلات جداسازی شده با استفاده از روش رانگ کوتای^{۱۲} مرتبه سوم حل شدند. نتایج تحقیق نشان داد که این روش بسیار مناسب بوده و به نظر می‌رسد که روش

¹ C-Property

² Bermudez

³ Vazquez

⁴ Hubbard

⁵ Garcia-Navarro

⁶ Zhou et al.

⁷ Source Term

⁸ Surface Gradient Method (SGM)

⁹ Harten-Lax-VanLeer

¹⁰ Roe's Approximate Riemann Solver

¹¹ Boundary-fitted Curvilinear Coordinates

¹² Range-Kutta

¹³ Conserved Variables

¹⁴ Coriolis

دامنه محاسباتی (ξ, η) منتقل کرده و رابطه زیر را به دست آورد
[۱۴ و ۱۵]:

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \eta} = \tilde{C} \quad (4)$$

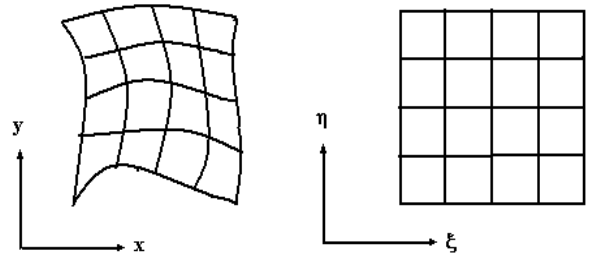
که در آن

$$\tilde{S} = JS, \quad \tilde{F} = y_{\eta} F - x_{\eta} G, \quad \tilde{G} = -y_{\xi} F + x_{\xi} G, \quad \tilde{C} = JC$$

در روابط فوق J ژاکوبین انتقال بوده و از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$J = x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi} \quad (5)$$

انتقال روابط به دامنه محاسباتی علاوه بر اینکه یک دامنه منظم مستطیلی ایجاد می کند، کد نویسی را نیز آسان تر می نماید اگرچه به دلیل ورود ترم های غیر خطی دیگر، معادلات طولانی تری باید حل شوند. با این عمل امکان بررسی و تحلیل مسائل با مرزهای پیچیده نیز در صورت لزوم فراهم می شود.



شکل ۱- دامنه فیزیکی (x, y) و دامنه محاسباتی (ξ, η)

۳- جدا سازی معادلات و تعیین فلاکس عددی^۱

با استفاده از روشهای مختلف می توان رابطه ۴ را حل کرد. در اینجا برای جداسازی معادلات از روش حجمهای محدود استفاده شد. این روش بسیار انعطاف پذیر بوده و مشکلات روش تفاضل محدود، مانند مشکلات مربوط به ارضای معادله جرم و نیز مشکل کدنویسی در روش عناصر محدود را ندارد. برای اعمال این روش، ابتدا از رابطه ۴ به صورت زیر بر روی یک حجم کنترل $(d\xi, d\eta)$ انتگرال گیری می شود:

$$\iint \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} d\xi d\eta + \iint \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \xi} d\xi d\eta + \iint \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \eta} d\xi d\eta = \iint \tilde{C} d\xi d\eta \quad (6)$$

از آنجا که می توان فواصل مکانی $\Delta \xi$ و $\Delta \eta$ را در دامنه محاسباتی اختیاری انتخاب کرد، این فواصل برای سهولت واحد در نظر گرفته شده و رابطه ۷ به دست می آید

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + \tilde{F}_{i+1/2, j} - \tilde{F}_{i-1/2, j} + \tilde{G}_{i, j+1/2} - \tilde{G}_{i, j-1/2} = \tilde{C}_{i, j} \quad (7)$$

در رابطه بالا زیرنویس های $(i+1/2)$ و نظایر آن نشان دهنده مقدار فلاکس در فصل مشترک دو سلول مجاور است که اصطلاحاً فلاکس عددی، نامیده می شود. روشهای متعددی را می توان برای تعیین فلاکس عددی مورد استفاده قرار داد. در واقع تفاوت بین روشهای با قابلیت تفکیک بالای مختلف، بیشتر در چگونگی تعیین این فلاکس عددی است. در این تحقیق از روش تفکیک تفاضل فلاکس که بر پایه روش گودونوف استوار است استفاده شد. همان طور که گفته شد در این روش در هر فصل مشترک یک مسئله ریمان حل می شود تا فلاکس عددی در آن فصل مشترک به دست آید. در اینجا از روش تقریبی رو به صورت زیر برای محاسبه این فلاکس ها استفاده شد:

$$\tilde{F}_{i+1/2} = \frac{1}{2} [\tilde{F}_L + \tilde{F}_R - |A| (S_R - S_L)] \quad (8)$$

$$\tilde{G}_{i+1/2} = \frac{1}{2} [\tilde{G}_L + \tilde{G}_R - |B| (S_R - S_L)] \quad (9)$$

که در این روابط A و B ماتریس های ژاکوبین فلاکس هستند:

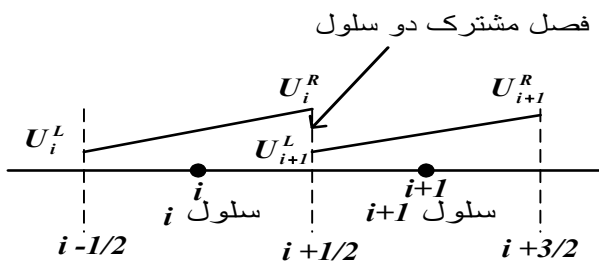
$$B = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial S}, \quad A = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial S} \quad (10)$$

قدر مطلق مقدار A و B با محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس های ژاکوبین فلاکس، از روابط زیر محاسبه می شود:

$$|A| = R_{\xi} |\Lambda_{\xi}| L_{\xi}, \quad |B| = R_{\eta} |\Lambda_{\eta}| L_{\eta} \quad (11)$$

که در روابط بالا

S_L و S_R مقادیر تخمین زده شده از هر متغیر ابقایی مثل h ، به ترتیب در سمت راست و چپ فصل مشترک سلول (i, j) و سلول $(i+1, j)$ است (شکل ۲). چنین تخمینی را می توان با در نظر گرفتن تغییرات خطی در هر سلول انجام داد و به یک دقت درجه ۲ رسید. در نظر گرفتن تغییرات ثابت در هر سلول منجر به دقت درجه ۱ خواهد شد.



شکل ۲- تغییرات خطی برای هر متغیر دلخواهی مثل U در هر سلول

¹ Numerical Flux

برای محاسبه روابط ۱۱ تا ۱۴ با استفاده از روش رو، مقادیر متوسط $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{h})$ را با استفاده از مقادیر سمت راست و چپ هر فصل مشترک، در هر فصل مشترک در نظر گرفته می‌شود. برای میانگین‌گیری از متوسط‌گیری رو^۱ استفاده می‌شود:

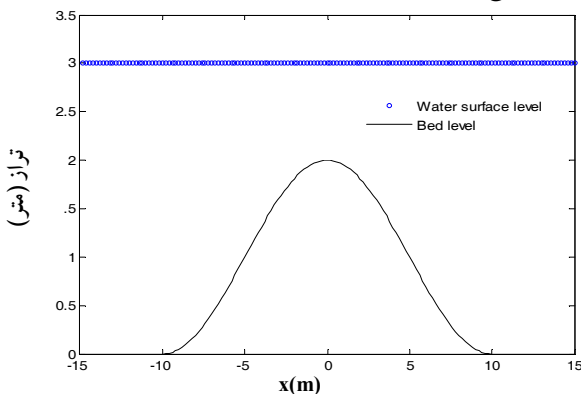
$$\tilde{u} = \frac{u_R \sqrt{h_R} + u_L \sqrt{h_L}}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L}}, \quad \tilde{v} = \frac{v_R \sqrt{h_R} + v_L \sqrt{h_L}}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L}}, \quad \tilde{h} = \frac{1}{2}(h_R + h_L) \quad (۱۶)$$

۴- خاصیت C و ایجاد توازن بین ترم چشمه و گرادیان فلاکس

فرایند حل ارائه شده در قسمت قبل به خوبی بر روی بسترهای صاف یا بستر با یک شیب ثابت عمل می‌کند. در بسیاری از موارد مانند بستر رودخانه‌های طبیعی، سطح بستر صاف نبوده و دارای برآمدگی‌ها و فرورفتگی‌های متعددی است. مسئله مهم در ترم چشمه وجود عباراتی مثل $\frac{\partial z}{\partial x}$ یا $\frac{\partial z}{\partial y}$ است که باید تفکیک شوند. در صورتی که به عنوان مثال ترم $gh \frac{\partial z}{\partial x}$ در رابطه ۲، به صورت ساده تفاضل مرکزی زیر تفکیک شود:

$$gh \frac{\partial z}{\partial x} = gh_i \frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{2} \quad (۱۷)$$

با وجود اینکه برای به دست آوردن فلاکس عددی از یک روش با قابلیت تفکیک بالا استفاده می‌شود، مدل توانایی حل معادلات بر روی بسترهای ناهموار را نخواهد داشت و این به دلیل عدم توازن و بالانس بین ترم چشمه و گرادیان بردار فلاکس است که ارضای آن به خاصیت C معروف است. برای تست کردن وجود یا عدم وجود این خاصیت در یک مدل عددی معمولاً حالت جریان ساکن^۲ ($q=0$)، که در آن دبی در واحد عرض کانال است) بر روی یک برآمدگی در حالت دائمی، مدل سازی می‌شود. شکل ۳ حالتی که در آن تراز سطح آب ثابت است یعنی $z+h=cte$ را نشان می‌دهد.



شکل ۳- جریان ساکن بر روی یک برآمدگی در کف

¹ Roe's Average
² Quiescent Flow

همچنین در رابطه ۱۱، R_ξ ماتریس بردارهای ویژه راست A ، R_η ماتریس بردارهای ویژه راست B ، L_ξ ماتریس بردارهای ویژه چپ A و ماتریس بردارهای ویژه چپ B بوده و Λ_ξ و Λ_η ماتریس‌های قطری هستند که به ترتیب مقادیر ویژه مربوط به ماتریس‌های A و B را در خود جای داده‌اند.

R_ξ ، R_η ، A_ξ ، Λ_ξ و L_ξ را می‌توان از طریق روابط زیر به دست آورد [۱۵]:

$$R_\xi = \begin{bmatrix} 0 & g_{22} & g_{22} \\ x_\eta & ug_{22} - cy_\eta & ug_{22} + cy_\eta \\ y_\eta & cx_\eta + vg_{22} & -cx_\eta + vg_{22} \end{bmatrix}, \quad (۱۲)$$

$$R_\eta = \begin{bmatrix} 0 & g_{11} & g_{11} \\ x_\xi & ug_{11} + cy_\xi & ug_{11} - cy_\xi \\ y_\xi & -cx_\xi + vg_{11} & cx_\xi + vg_{11} \end{bmatrix}$$

$$|\Lambda_\xi| = \begin{bmatrix} |uy_\eta - vx_\eta| & 0 & 0 \\ 0 & |uy_\eta - vx_\eta - cg_{22}| & 0 \\ 0 & 0 & |uy_\eta - vx_\eta + cg_{22}| \end{bmatrix}, \quad (۱۳)$$

$$|\Lambda_\eta| = \begin{bmatrix} |vx_\xi - uy_\xi| & 0 & 0 \\ 0 & |vx_\xi - uy_\xi - cg_{11}| & 0 \\ 0 & 0 & |vx_\xi - uy_\xi + cg_{11}| \end{bmatrix}$$

$$L_\xi = \begin{bmatrix} \frac{ux_\eta + vy_\eta}{g_{22}^2} & \frac{-x_\eta}{g_{22}^2} & \frac{-y_\eta}{g_{22}^2} \\ \frac{uy_\eta - vx_\eta}{2cg_{22}} + \frac{1}{2} & \frac{-y_\eta}{2cg_{22}} & \frac{x_\eta}{2cg_{22}} \\ \frac{-uy_\eta + vx_\eta}{2cg_{22}} + \frac{1}{2} & \frac{y_\eta}{2cg_{22}} & \frac{-x_\eta}{2cg_{22}} \end{bmatrix}, \quad (۱۴)$$

$$L_\eta = \begin{bmatrix} \frac{-ux_\xi - vy_\xi}{g_{11}^2} & \frac{x_\xi}{g_{11}^2} & \frac{y_\xi}{g_{11}^2} \\ \frac{-uy_\xi + vx_\xi}{2cg_{11}} + \frac{1}{2} & \frac{y_\xi}{2cg_{11}} & \frac{-x_\xi}{2cg_{11}} \\ \frac{uy_\xi - vx_\xi}{2cg_{11}} + \frac{1}{2} & \frac{-y_\xi}{2cg_{11}} & \frac{x_\xi}{2cg_{11}} \end{bmatrix}$$

که در این روابط

$$g_{22} = \sqrt{x_\eta^2 + y_\eta^2}, \quad c = \sqrt{gh}, \quad g_{11} = \sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2} \quad (۱۵)$$

کردند. در اینجا این روش برای حل به روش رو در دستگاه مختصات منحنی الخط منطبق بر مرز به کار برده شد. همان طور که نتایج تحقیق نشان می دهد توازن در این روش نیز به خوبی برقرار گردید. جزئیات روش SGM در مرجع [۱۳]، بیان شده است که در اینجا به طور مختصر به آن اشاره می شود.

تراز سطح آب را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\eta(x, t) = h(x, t) + z(x) \quad (20)$$

در صورتی که از تغییرات خطی برای تخمین مقادیر تراز سطح آب در سلول i استفاده شود رابطه ۲۱ به دست می آید:

$$\eta = \eta_i + (x - x_i) \delta \eta_i \quad (21)$$

که در آن گرادیان η یعنی $\delta \eta_i$ را در سلول i می توان به ترتیب زیر محاسبه نمود:

$$\delta \eta_i = \phi \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{x_{i+1} - x_i}, \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right) \quad (22)$$

در رابطه بالا ϕ یک محدود کننده شیب^۱ است که برای جلوگیری از نوسانات عددی از آن استفاده می شود. در اینجا از یک محدود کننده شیب مینمود^۲ استفاده شد که در انتخاب بین دو پارامتر دلخواه a و b (که در اینجا انتخاب بین دو شیب برای تراز آب است) به ترتیب زیر تعریف می شود:

$$\phi(a, b) = \max[0, \min(a, b)] \quad (23)$$

سپس می توان با داشتن شیب تراز آب و مقدار تراز آب در مرکز هر سلول، مقدار تراز آب را در سمت چپ و راست آن سلول، یعنی در فصل مشترکها، محاسبه کرد. به عنوان مثال برای فصل مشترک $(i-1/2)$:

$$\eta_{i-1/2}^L = \eta_{i-1} + \frac{1}{2} \Delta x_{i-1} \delta \eta_{i-1}, \quad \eta_{i-1/2}^R = \eta_i - \frac{1}{2} \Delta x_i \delta \eta_i \quad (24)$$

که در آن

$\Delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ و بالانویس های L و R نشان دهنده مقادیر تراز آب به ترتیب در سمت چپ و راست، نسبت به مرکز سلول هستند.

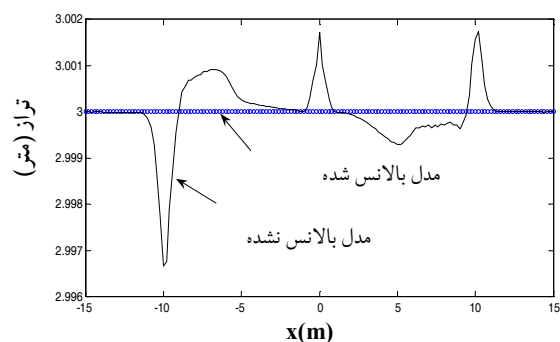
به محض اینکه تراز سطح آب در فصل مشترکها به دست آمد، عمق آب را می توان در فصل مشترکها با کم کردن تراز بستر از تراز سطح آب به دست آورد

$$h_{i-1/2}^L = \eta_{i-1/2}^L - z_{i-1/2}^L, \quad h_{i-1/2}^R = \eta_{i-1/2}^R - z_{i-1/2}^R \quad (25)$$

¹ Slope Limiter

² Minmod Limiter

در وضعیتی که توازن بین ترم چشمه و گرادیان فلاکس وجود دارد، مدل عددی باید توانایی مدل سازی چنین جریان ساکنی را داشته باشد. در واقع پس از طی یک بازه زمانی، تراز سطح آب باید ثابت و دست نخورده باقی بماند. شکل ۴ یک نگاه نزدیک تر به تراز سطح آب در مدلی که در آن خاصیت C ارضا شده و مدلی که در آن این خاصیت ارضا نشده است را نشان می دهد. همان گونه که مشخص است در صورتی که بالانس وجود نداشته باشد تراز سطح آب با وجود $q=0$ و با گذشت زمان دستخوش نوسانات می شود در حالی که مدل دارای توازن چنین تغییراتی را نشان نمی دهد. بنابراین مدلی که دارای بالانس بین ترم چشمه و گرادیان فلاکس نیست حتی از مدل سازی یک جریان ساکن نیز عاجز خواهد بود.



شکل ۴- نگاه نزدیک تری به تراز سطح آب در یک مدل بالانس شده و یک مدل بالانس نشده

برای توضیح بیشتر معادلات آبهای کم عمق در حالت یک بعدی در روابط ۱۸ و ۱۹ نشان داده شده است

$$h_t + (hu)_x = 0 \quad (18)$$

$$(hu)_t + (hu^2 + gh^2/2)_x = ghz_x \quad (19)$$

در حالتی که جریان ساکن است، معادله پیوستگی یعنی رابطه ۱۸ خودبخود ارضا می شود چون $u=0$ بوده و جریان دائمی است. معادله منتم یعنی رابطه ۱۹ زمانی ارضا خواهد شد که ترم $(gh^2/2)_x$ با ترم ghz_x در حالت توازن باشد. در صورتی که در یک مدل عددی چنین توازنی وجود داشته باشد، گفته می شود که آن مدل، خاصیت C را دقیقاً ارضا می کند. ارضای این خاصیت به خصوص برای مدل سازی جریان بر روی توپوگرافی های نامنظم برای یک مدل عددی بسیار ضروری است.

همان طور که گفته شد ژو و همکاران یک روش بسیار ساده و مناسب را به نام گرادیان تراز آب (SGM) برای برقراری بالانس بین ترم چشمه و گرادیان بردار فلاکس ارائه داده اند [۱۳]. آنها از روش حل مسئله ریمان به روش HLL در دستگاه کارتری استفاده

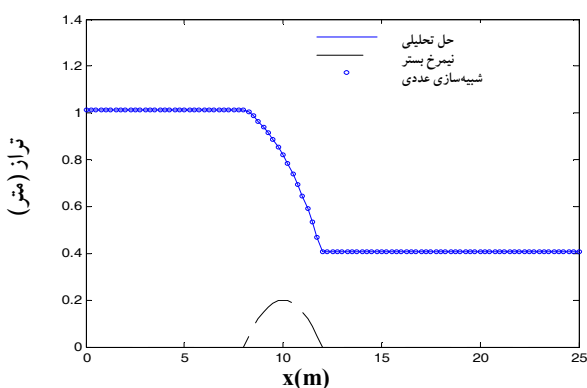
روشهایی که در آنها توازن بردار گرادیان فلاکس و ترم چشمه وجود دارد چنین نوساناتی مشاهده نمی شود. شکل صاف و بدون نوسان ایجاد شده برای تراز سطح آب طی گذشت زمان نشان از ارضای خاصیت C در این روش دارد.

۲-۶- شبیه سازی ۲: جریان بر روی برآمدگی کف بدون وجود شوک

یک جریان دائمی در کانالی به طول ۲۵ متر دارای یک برآمدگی در کف از جمله مسائل کلاسیکی است که تاکنون برای بررسی صحت بسیاری از روشهای عددی به کار رفته است [۸ و ۱۶] (رابطه ۳۰)

$$z = \begin{cases} 0.2 - 0.05(x - 10)^2 & \text{if } 8 < x < 12 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (30)$$

در مرز بالادست، دبی ۱/۵۳ مترمکعب بر ثانیه در واحد عرض اعمال شد. در مرز پایین دست تا زمانی که جریان در آنجا زیر بحرانی بود عمق آب ۰/۶۶ متر بود. در صورتی که جریان در پایین دست فوق بحرانی شود نیازی به اعمال هیچ شرط مرزی در آنجا نیست. در چنین مسئله ای جریان در طی عبور از برآمدگی از حالت بحرانی گذشته و فوق بحرانی خواهد شد. بنابراین پس از گذشت مدت زمانی، نیازی به اعمال هیچ شرط مرزی در پایین دست نیست. در این پژوهش از یک شبکه ۲۰×۵ برای مدل سازی استفاده شد. شبکه ریزتر تغییر قابل ملاحظه ای در نتایج نمی دهد. نتایج مدل سازی در شکل ۵ نشان داده شده است که انطباق بسیار خوبی را با نتایج تحلیلی نشان می دهد.



شکل ۵- تراز سطح آب در جریان بر روی برآمدگی شبیه سازی ۲، بدون وجود شوک

۳-۶- شبیه سازی ۳: جریان بر روی برآمدگی کف با وجود شوک
در این شبیه سازی همان کانال مسئله قبل با همان برآمدگی در نظر گرفته شد. این بار دبی در واحد عرض ۰/۱۸ مترمکعب بر ثانیه در مرز بالادست اعمال شد. در مرز پایین دست عمق آب ۰/۳۳ متر

تخمین مقادیر ابقایی hu و hv نیز به طریق مشابهی انجام می شود. در فرایند بالا باید توجه داشت که

$$z_{i+1/2} = \frac{1}{2}(z_i + z_{i+1}), \quad z_{i-1/2} = \frac{1}{2}(z_i + z_{i-1}) \quad (26)$$

$$h_i = \frac{1}{2}(h_i^R + h_i^L)$$

و به این ترتیب جداسازی ترم چشمه با استفاده از روش فوق با ارضای خاصیت به راحتی انجام پذیر خواهد بود

$$gh \frac{\partial z}{\partial x} = gh_i(z_{i+1/2} - z_{i-1/2}) \quad (27)$$

روش مذکور یک دقت درجه ۲ با ارضای خاصیت را ایجاد می کند.

۵- انتگرال گیری زمانی

از روش رانگ کوتای مرتبه سوم برای انتگرال گیری زمانی استفاده شد. رابطه ۷ را می توان چنین نوشت:

$$(28)$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = -\tilde{F}_{i+1/2,j} + \tilde{F}_{i-1/2,j} - \tilde{G}_{i,j+1/2} + \tilde{G}_{i,j-1/2} + \tilde{C}_{i,j} = L(\tilde{S})$$

روش رانگ کوتای مرتبه سوم بر روی رابطه ۲۷ به ترتیب زیر

اعمال می گردد:

$$(29)$$

$$\tilde{S}_{ij}^{(1)} = \tilde{S}_{ij}^n + \Delta t L(\tilde{S}_{ij}^n)$$

$$\tilde{S}_{ij}^{(2)} = \frac{3}{4}\tilde{S}_{ij}^n + \frac{1}{4}\tilde{S}_{ij}^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(\tilde{S}_{ij}^{(1)})$$

$$\tilde{S}_{ij}^{(n+1)} = \frac{1}{3}\tilde{S}_{ij}^n + \frac{2}{3}\tilde{S}_{ij}^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(\tilde{S}_{ij}^{(2)})$$

بازه زمانی Δt با استفاده از شرط شناخته شده کورانت انتخاب

می گردد.

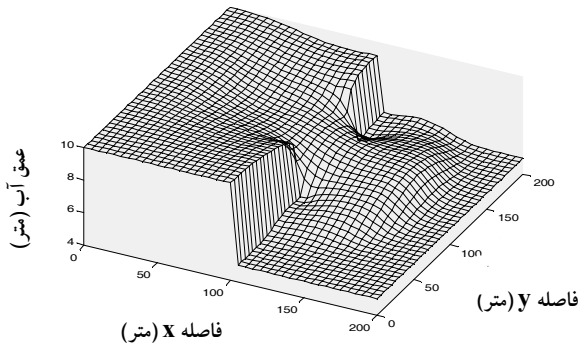
۶- نتایج شبیه سازی های عددی

برای تعیین صحت و دقت مدل عددی ارائه شده تعدادی از مسائل کلاسیک با استفاده از این مدل حل شدند که در زیر به آنها اشاره می شود.

۱-۶- شبیه سازی ۱: جریان ساکن

برای بررسی خاصیت C، ابتدا جریان ساکن بر روی برآمدگی کف در شکل ۴ مورد تحلیل قرار گرفت. در یک نگاه نزدیک به سطح آب ایجاد شده با گذشت زمان در روشی که خاصیت C را ارضا نمی کند، نوساناتی در تراز سطح آب مشاهده گردید. ایجاد چنین نوساناتی حتی در صورتی که از یک روش با قابلیت تفکیک بالا استفاده شده باشد اغلب منجر به واگرایی روش می شود. در

مسئله با یک شبکه به ابعاد 5×5 متر توسط مدل شبیه‌سازی شد. شکل ۸ پروفیل سطح آب را $7/2$ ثانیه پس از شکست سد نشان می‌دهد که در انطباق بسیار خوب با نتایج دیگر تحقیقات است. توانایی حل این مسئله با این روش نشان می‌دهد که روش به‌کار گرفته شده را می‌توان در مسائلی که در آنها مؤلفه دوم سرعت (V) نیز مشارکت دارد استفاده کرد.



شکل ۸- پروفیل سطح آب در شکست دوبعدی سد $7/2$ ثانیه پس از شکست سد

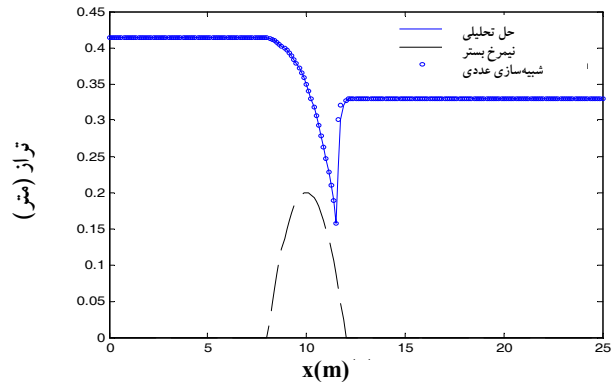
۷- نتیجه‌گیری

برای حل معادلات حاکم بر آبهای کم عمق از روش تفکیک تفاضل فلاکس (FDS) در این مقاله استفاده شد. معادلات با استفاده از روش دستگاه مختصات منحنی الخط منطبق بر مرز از دامنه فیزیکی به دامنه محاسباتی منتقل شده و در آنجا با استفاده از روش حجمهای محدود جداسازی گردیدند. برای تخمین و محاسبه فلاکس عددی از روش حل مسئله ریمان به روش تقریبی رو استفاده گردید. برای اینکه مدل ارائه شده قابلیت تحلیل بسترهای ناهموار را نیز داشته باشد از روش گرادیان تراز آب ارائه شده توسط ژو و همکاران بهره‌گیری شد.

مدل عددی ارائه شده دوبعدی بوده و دارای قابلیت تفکیک بالایی است و از این رو می‌تواند در صورتی که ناپیوستگی‌هایی در دامنه جریان وجود داشته باشد آنها را شناسایی کرده و جریان را مدل‌سازی کند. چنین ناپیوستگی‌هایی در مسائل عملی و کاربردی مانند پرش هیدرولیکی در حوضچه‌های آرامش دیده می‌شوند. علاوه بر این، مدل می‌تواند جریان بر روی بسترهای ناهموار را نیز شبیه‌سازی کند. چنین بسترهایی در جریان‌های طبیعی در رودخانه‌ها دیده می‌شوند.

مسائل کلاسیک مختلفی توسط مدل ارائه شده حل گردید. انطباق مناسب نتایج با نتایج تحلیلی و مدل‌های عددی دیگر، قابلیت بالای روش را نشان داد.

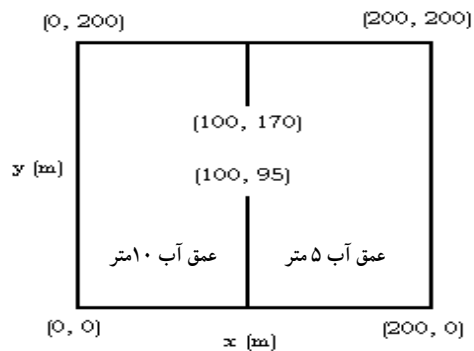
اعمال گردید. مجدداً از یک شبکه 200×5 برای تحلیل استفاده شد. در چنین مسئله‌ای یک شوک در جریان وجود دارد که همان‌گونه که شکل ۶ نشان می‌دهد مدل به خوبی آن را تسخیر کرده است. مقایسه نتایج مدل‌سازی با مقادیر تحلیلی دقت مناسب روش را نشان می‌دهد.



شکل ۶- تراز سطح آب در جریان بر روی برآمدگی شبیه‌سازی ۳، با وجود شوک

۴-۶- شبیه‌سازی ۴: شکست دو بعدی سد

برای بررسی توانایی مدل در شبیه‌سازی‌های دوبعدی، مسئله شکست دو بعدی سد در نظر گرفته شد. دامنه مسئله با کانالی به ابعاد 200 متر در 200 متر در جهت‌های طولی و عرضی با بستر صاف مشخص شد. یک شکاف نامتقارن به عرض 75 متر که محل قرارگیری سد است، درست در وسط وجود داشت و ضخامت سد ناچیز فرض شد. تراز اولیه سطح آب در مخزن سد 10 متر و در پایاب 5 متر در نظر گرفته شد (شکل ۷).



شکل ۷- دامنه مسئله در شکست دو بعدی سد

چنانچه سد ناگهان شکسته شود و پروفیل سطح آب $7/2$ ثانیه پس از شکست سد مورد سؤال باشد، برای چنین مسئله‌ای حل تحلیلی وجود ندارد ولی می‌توان نتایج را با مدل‌های عددی دیگر مقایسه نمود [۸، ۱۵ و ۱۷]. این مسئله نیز به‌عنوان یکی از مسائل کلیدی برای بررسی صحت و دقت مدل‌های عددی مطرح است.

۸- قدردانی

این مقاله حاصل یک طرح پژوهشی است که با حمایت دانشگاه آزاد اسلامی واحد یاسوج انجام شده است. به این وسیله از حوزه معاونت پژوهشی قدردانی به عمل می آید.

۹- مراجع

- 1- Harten, A. (1983). "High-resolution schemes for hyperbolic conservation laws." *J. Comput. Phys.*, 49, 357-393.
- 2- Osher, S. (1986). "Convergence of generalized MUSCL schemes." *SIAM J. Numer. Anal.*, 22, 947-961.
- 3- Osher, S., and Chakravarthy, S.R. (1986). *Very high order accurate TVD schemes, in: IMA Volumes in Mathematics and Its Applications*, 2, Springer-Verlag, New York, 229-274.
- 4- Harten, A, Engquist, B., Osher, S., and Chakravarthy, S. R. (1987). "Uniformly high-order accurate essentially nonoscillatory scheme, III." *J. Comput. Phys.*, 71 (2), 231-303.
- 5- Steger, J.L., and Warming, R.F. (1981). "Flux vector splitting of the inviscid gas dynamic equations with application to finite difference methods." *J. Comput. Phys.*, 40, 263-293.
- 6- Yang, J.Y., Hsu, C.A., and Chang, S.H. (1993), "Computations of free surface flows, I: One-dimensional dam-break flow." *J. Hydraul. Res.*, 31(1), 19-34.
- 7- Sun, M., and Takayama, K. (2003). "An artificially upstream flux vector splitting scheme for the Euler equations." *J. Comput. Phys.*, 189, 305-329.
- 8- Baghlani, A., Talebbeydokhti, N., and Abedini, M.J. (2007). "A shock capturing model based on flux-vector splitting method in boundary-fitted curvilinear coordinates." *Appl. Math. Modell.*, 32, 249-266.
- 9- Godunov, S.K. (1959). "A difference method for the numerical computation of discontinuous solution of hydrodynamic equations." *Math. Sbornik*, 47(89), 271-306 (in Russian).
- 10- Toro, E.F. (2001). *Shock-capturing methods for free surface shallow flows*, John Wiley and Sons Pub., New York.
- 11- Bermudez, A., and Vazquez, M.E. (1994). "Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms." *Comput. Fluids*, 23(8), 1049-1071.
- 12- Hubbard, M. E., and Garcia-Navarro, P. (2000). "Flux difference splitting and balancing of source terms and flux gradients." *J. Comput. Phys.*, 165, 89-125.
- 13- Zhou, J.G., Causon, D.M., Mingham, C.G., and Ingram D.M., (2001), "The surface gradient method for the treatment of source terms in shallow-water equations." *J. Comput. Phys.*, 168, 1-25.
- 14- Molls, T., and Chauhdry, M.H. (1995). "Depth-averaged open-channel flow model." *J. Hydraul. Eng.*, ASCE, 121(6), 453-465.
- 15- Fujihara, M., and Borthwick, G.L. (2000). "Godunov-type solution of curvilinear shallow-water equations." *J. Hydraul. Eng.*, 126(11), 827-836.
- 16- Xing, Y., and Shu, C.W. (2006). "High order well-balanced finite volume WENO schemes and discontinuous Galerkin methods for a class of hyperbolic systems with source terms." *J. Comput. Phys.*, 214, 567-598.
- 17- Zhao, D.H., Shen H.W., Tabios III, G.Q., Lai, J.S., and Tan, W.Y. (1994). "Finite-volume two-dimensional unsteady flow model for river basins." *J. Hydraul. Eng.*, 120(7), 863-883.